

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 21 /01/2024

Θέμα Α

A1. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , τότε να αποδείξετε ότι $S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

A2. Να διατυπώσετε τον ορισμό της n -οστής ρίζας ενός μη αρνητικού πραγματικού αριθμού a .

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $x^v = a$ με $a < 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση, την $-\sqrt[v]{|a|}$

β) Η δύναμη $(-3)^{\frac{3}{2}}$ δεν ορίζεται

γ) Η εξίσωση $\alpha^2 x^2 + 3\alpha x + 2 = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

δ) Η εξίσωση $x^2 - x - \alpha^2 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

ε) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha + \beta| \leq |-\alpha| + |\beta|$

Μονάδες: 10-5-10

Θέμα Β

B1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

B2. Δίνονται οι παραστάσεις $\Gamma = |2x - 4|$ και $\Delta = |x - 3|$, με x πραγματικό αριθμό.

α) Να αποδείξετε ότι αν $2 \leq x < 3$, τότε $\Gamma + \Delta = x - 1$.

β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $\Gamma + \Delta = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες: 15-10

Θέμα Γ

Γ1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

β) $\frac{2x+3}{x} + \frac{1-2x}{x+1} = \frac{4}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2+x}$

Γ2. Να βρεθούν οι διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$

α) έχει μοναδική λύση η οποία και να βρεθεί.

β) είναι αδύνατη.

γ) είναι αδύνατη.

Γ3. Να βρεθεί το $\mu \in \mathbb{R}$ αν η εξίσωση $x^2 - (\mu - 1)x - \mu + 1 = 0$ έχει διπλή πραγματική ρίζα και έπειτα να βρεθεί αυτή η ρίζα.

Μονάδες 10-9-6

Θέμα Δ

Δ1. Αν $\alpha^2 < 3\beta$, να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα.

Δ2. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\Delta - 2)x + \frac{\Delta - 5}{4} = 0$ (1) όπου Δ είναι η διακρίνουσά της.

α) Να βρεθεί η διακρίνουσα Δ .

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται $\Delta = 3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση (1).

γ) Αν $\rho_1 < \rho_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{256 \sqrt{\rho_2^4}} + \frac{1}{2 \cdot 2024 \sqrt{\rho_1^4}}$$

Μονάδες 7-18