## ΘΕΜΑ Α

Λύσεις Διαγωνίσματος Άλγεβρας Α' Λυκείου 21/1/2024

Α1. Σχολ. σελ 90

Α2. Σχολ. σελ 70

Α3. α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Πρέπει $(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

β) Πρέπει $(2-x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

γ) Για $x \leq 2$ έχω: $A = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = -(x-2) = 2-x$

και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x$. Άρα $A = B$

Β2. α) $2 \leq x < 3 \Leftrightarrow x \geq 2$ και $x < 3$

$\Leftrightarrow 2x \geq 4$ και $x < 3$

$\Leftrightarrow \boxed{2x-4 \geq 0}$ και $\boxed{x-3 < 0}$

Άρα $\Gamma = |2x-4| = 2x-4$ και $\Delta = |x-3| = -(x-3) = 3-x$

Επομένως $\Gamma + \Delta = 2x-4+3-x = x-1$

β) $\Gamma + \Delta = 2 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$, Αδύνατο για $x \in [2,3)$.

Άρα δεν υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε $\Gamma + \Delta = 2$.

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Θέτω $x^2 = \omega$, $\omega \geq 0$ άρα $x^4 = \omega^2$ και έχω:

$\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$ με $\Delta = 9$, άρα

$$\omega_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Δηλαδή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

---

β) $\dfrac{2x+3}{x} + \dfrac{1-2x}{x+1} = \dfrac{4}{x+1} + \dfrac{2x+3}{x^2+x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x} + \dfrac{1-2x}{x+1} = \dfrac{4}{x+1} + \dfrac{2x+3}{x(x+1)}$ ΕΚΠ $= x(x+1)$, πρέπει $x \cdot (x+1) \neq 0$

Άρα $x \neq 0$ και $x \neq -1$

Επομένως: $\cancel{x}(x+1) \cdot \dfrac{2x+3}{\cancel{x}} + x\cancel{(x+1)} \dfrac{1-2x}{\cancel{x+1}} = x\cancel{(x+1)} \dfrac{4}{\cancel{x+1}} + \cancel{x(x+1)} \dfrac{2x+3}{\cancel{x(x+1)}}$

$\Leftrightarrow (x+1)(2x+3) + x(1-2x) = 4x + 2x + 3$

$\Leftrightarrow \cancel{2x^2} + 3x + 2x + 3 + x - \cancel{2x^2} = 4x + 2x + 3$

$\Leftrightarrow 6x - 6x = 3 - 3$

$\Leftrightarrow 0x = 0$ Αόριστη / Άπειρες λύσεις

Γ2. $(\lambda-1)x-2\lambda+2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$

$(\lambda-1)x=2\lambda-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda-1}$

- Αν $\lambda=1$: $0x=0$: Αόριστη
- Αν $\lambda\neq1$: $x=\dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda-1} \Leftrightarrow x=2$ Μοναδική λύση
- Η εξίσωση δε μπορεί να είναι αδύνατη γιατί αν ήταν θα έπρεπε $\lambda=1$ αλλά $2\lambda-2=0$ για $\lambda=1$. Άρα έχω πάλι $0x=0$: Αόριστη

Γ3. $x^2-(\mu-1)x-\mu+1=0$ (1)

- Επειδή η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα θα έχει διακρίνουσα $\Delta=0 \Leftrightarrow [-(\mu-1)]^2-4\cdot1\cdot(-\mu+1)=0 \Leftrightarrow \mu^2+2\mu-3=0$ (2)
- Η διακρίνουσα της (2) θα είναι: $\Delta'=16>0$ και έχει ρίζες τις: $\mu_1=-3$ και $\mu_2=1$. Άρα $\mu=-3$ ή $\mu=1$.
- Για $\mu=-3$ η (1) έχει διπλή ρίζα την $x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=-\dfrac{(\mu-1)}{2\cdot1}=$

$=\dfrac{\mu-1}{2}=\dfrac{-3-1}{2}=-2.$

- Για $\mu=1$ η (1) έχει διπλή ρίζα τη $x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\dfrac{\mu-1}{2}=\dfrac{1-1}{2}=0.$

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\alpha^2<3\beta$ . $x^2-\alpha x+\beta=0$ (1)

- Αρκεί να δείξουμε ότι για τη διακρίνουσα της (1) ισχύει $\Delta<0$ $\Leftrightarrow (-\alpha)^2-4\beta<0 \Leftrightarrow \alpha^2<4\beta$
- Έχουμε $0\leq\alpha^2<3\beta$, άρα $\beta>0$

Επειδή $\beta>0$ είναι: $3\beta<4\beta$, άρα $\alpha^2<3\beta<4\beta$, οπότε $\alpha^2<4\beta$.

Δ2.

α) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (\Delta-2)^2 - 4\cdot\dfrac{\Delta-5}{4} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \Delta^2 - 6\Delta + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 3$

β) Η εξίσωση για $\Delta=3$ γίνεται: $x^2 + x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ή $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

γ) Αν $\rho_1 < \rho_2$ με $\rho_1, \rho_2$ οι ρίζες της (1) τότε: $\rho_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

και $\rho_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, μάλιστα $\rho_2 > 0$.

Για την απλούστευση της Α παίρνω ξεχωριστά τους παρονομαστές κι έχω:

- $\left(\sqrt[256]{\rho_2^{\,4}}\right)^{64} = \sqrt[256]{\rho_2^{\,4\cdot 64}} = \sqrt[256]{\rho_2^{\,256}} = \rho_2$

- $\left(\sqrt[2024]{\rho_1^{\,4}}\right)^{1012} = \sqrt[2024]{\rho_1^{\,4\cdot 1012}} = \sqrt[2024]{\rho_1^{\,4048}}$

$= |\rho_1|^{\frac{4048}{2024}} = |\rho_1|^2 \overset{|x|^2 = x^2}{=\!=} \rho_1^{\,2}$

Επομένως έχω:

$$A = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{2\rho_1^{\,2}} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{-1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{3})^2}{4\;2}} =$$

$$= -\frac{2}{1-\sqrt{3}} + \frac{2}{1+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} = -\frac{2}{1-\sqrt{3}} + \frac{2}{4+2\sqrt{3}} = -\frac{2}{1-\sqrt{3}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(2+\sqrt{3})}$$

$$= -\frac{2\cdot(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} + \frac{1\cdot(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = -\frac{2+2\sqrt{3}}{1-3} + \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} =$$

$$= -\frac{2+2\sqrt{3}}{-2} + \frac{2-\sqrt{3}}{1} = \frac{\cancel{2}+\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} + (2-\sqrt{3}) = 1+\cancel{\sqrt{3}}+2-\cancel{\sqrt{3}} = \boxed{3}$$