ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ.111)

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ.104)

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 128)

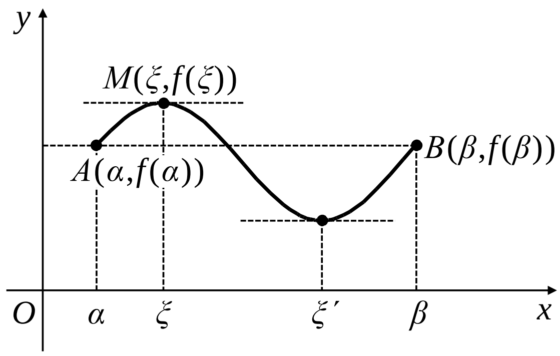
Διατύπωση

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi)=0$



Γεωμετρική ερμηνεία

Εφόσον υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο $M(\xi,f(\xi))$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Α4. α) **Λ** β) **Λ** γ) **Λ** δ) **Σ** ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η $g\circ h$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in D_h \\ h(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$$

Άρα $D_{g\circ h}=(0,+\infty)$.

Ο τύπος της είναι:

$$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-x^2}{x}.$$

Β2. i) Είναι,

$$f(x)=\frac{4-x^2}{x}=\frac{4}{x}-x,\ x>0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$f'(x)=-\frac{4}{x^2}-1<0$ για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Είναι,

$$\pi>e\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\pi)<f(e)\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow e\left(4-\pi^2\right)<\pi\left(4-e^2\right)\overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow}\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}.$$

Β3. Αναζητούμε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο $x_0=0$:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(4-x^2\right)\right]=+\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\left(4-x^2\right)=4>0$. Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Πλάγια – οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=-1=\lambda$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2+x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}\right)=0=\beta.$$

Άρα η ευθεία $y=-x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4. Έχουμε, $\left|\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)\right|\le1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x}{4-x^2}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{\frac{4}{x}-x}\right|=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)=0$$

επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{συν}(x^2+1)}{f(x)}=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει

$$\int_2^3 xf(x)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3(1+\alpha x)dx=1$$

$$\Leftrightarrow[x]_2^3+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=0$$

Γ2. i) Είναι

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=-1$$

και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x}=-1$$

Επειδή, $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$.
Συνεπώς ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$$

Αν είναι ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ ισχύει

$$\text{εφ}\omega=-1\Leftrightarrow\omega=\frac{3\pi}{4}$$

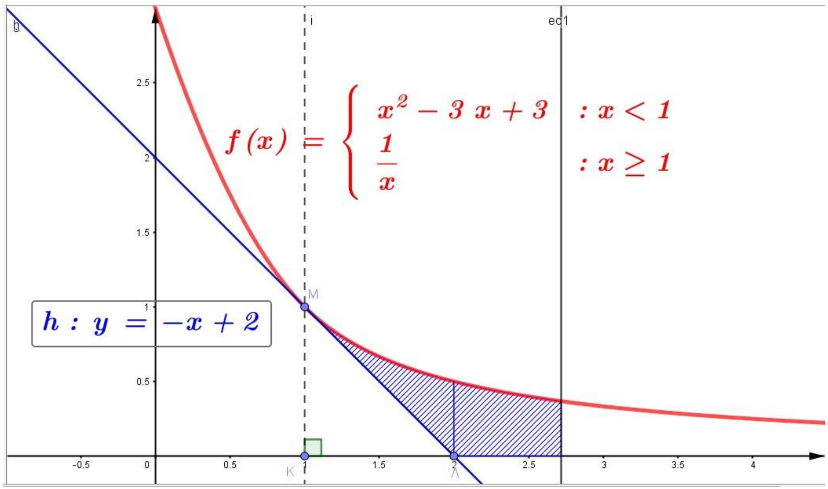
Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x-3<0$
(αφού $x<1\Leftrightarrow 2x<2\Leftrightarrow 2x-3<-1$)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ και $f'(1)=-1$ συνεπώς $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) άρα και στο $x_0=1$ ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, η f είναι 1 – 1.
Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Γ4. Η $\varepsilon: y=-x+2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Lambda(2,0)$. Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.
Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(1,1)$.



<u>1ος τρόπος</u>

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx-(K\Lambda M)=\int_1^e\frac{1}{x}dx-\frac{(K\Lambda)\cdot(KM)}{2}=[\ln x]_1^e-\frac{1}{2}=1-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ τ. μον.}$$

<u>2ος τρόπος</u>

$$E(\Omega)=\int_1^2(f(x)-y)dx+\int_2^e f(x)dx$$

Όμως $\displaystyle\int_1^2(f(x)-y)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=\ln 2+2-4-\left(0+\frac{1}{2}-2\right)=\ln 2-\frac{1}{2}$

$$\int_2^e f(x)dx=\int_2^e\frac{1}{x}dx=[\ln x]_2^e=1-\ln 2$$

Επομένως

$$E(\Omega)=\ln 2-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{1}{2}\text{ τ. μον.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1} \text{ για κάθε } x\in(0,1)\cup(1,2).$$

Η f είναι συνεχής στο D_f άρα

$$\lim_{x\to1}g(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to1}(f(x)-2x)=\lim_{x\to1}\left(g(x)\cdot(x-1)\right)=1\cdot0=0.$$

όμως

$$\lim_{x\to1}(f(x)-2x)=\ln(2-1)-1+\kappa-2=\kappa-3.$$

οπότε

$$\kappa-3=0\Rightarrow\kappa=3.$$

Δ2. Για κάθε $x\in(0,2)$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

Είναι

- $f'(x)=0\overset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow}x=1$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow1<x<2$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow0<x<1$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1=(0,1]$ οπότε $f(A_1)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$ διότι

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to0^+}\ln(2-x)=\ln2 \text{ και } \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

και

$$f(1)=2$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=(1,2)$ οπότε

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to2^-}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(-\infty,2)$$

διότι

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to 2^-}\ln(2-x)\underset{2-x>0}{\overset{u=2-x}{=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

Συνεπώς έχουμε ότι :

$0\in f(A_1)$ και η f γνησίως αύξουσα στο A_1 οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

και

$0\in f(A_2)$ και η f γνησίως φθίνουσα στο A_2 οπότε υπάρχει $x_2\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$

Θα αποδείξουμε ότι $x_1<\frac{1}{3}$

1^{ος} τρόπος

Είναι

$$0<x_1<\frac{1}{3}\underset{x\in(0,1)}{\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}} f(x_1)<f\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow 0<\ln\frac{5}{3} \text{ το οποίο ισχύει.}$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι

$$f(x_1)=0\Leftrightarrow \ln(2-x_1)+3-\frac{1}{x_1}=0\Leftrightarrow \ln(2-x_1)=\frac{1}{x_1}-3$$

Το $\ln(2-x_1)>0$ διότι $0<x_1<1\Leftrightarrow -1<-x_1<0\Leftrightarrow 1<2-x_1<2$

οπότε $\frac{1}{x_1}-3>0\Leftrightarrow x_1<\frac{1}{3}$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Η f συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}$$

Επίσης

$$f''(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{x^3}<0$$

Τελικά η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Δ4 i) Αφού F αρχική της f θα είναι $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(0,2)$ και όμοια, αφού G αρχική της f, άρα $G'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(0,2)$, οπότε :

$$F'(x)=G'(x)\Leftrightarrow F(x)=G(x)+c \text{ , για κάθε } x\in(0,2) \ (1)$$

Από (1) για $x=x_1$: $F(x_1)=G(x_1)+c\Leftrightarrow G(x_1)+c=0\Leftrightarrow G(x_1)=-c$ (2)

Από (1) για $x=x_2$: $F(x_2)=G(x_2)+c\Leftrightarrow F(x_2)=c$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3) : $F(x_2)+G(x_1)=0$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$, $x\in[x_1,x_2]$

Η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών

$$\Phi(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=-x_2F(x_2)+x_1-x_2 \ (4)$$

$$\Phi(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1 \ (5)$$

Είναι $0<x_1<x_2<2$ άρα $x_1-x_2<0$ και $x_2-x_1>0$. Ακόμη :

$F'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ γιατί για κάθε :

- $x\in[x_1,1]$ είναι η f γν. αύξουσα άρα $x_1<x<1\Rightarrow 0=f(x_1)<f(x)\Rightarrow 0<f(x)$
- $x\in[1,x_2]$ είναι η f γν. φθίνουσα άρα $1<x<x_2\Rightarrow f(x)>f(x_2)=0\Rightarrow f(x)>0$

Τελικά $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ και αφού F συνεχής στο $[x_1,x_2]$ θα είναι $F\nearrow$ στο $[x_1,x_2]$, οπότε :

$$x_1<x_2\overset{F\nearrow}{\Rightarrow}F(x_1)<F(x_2)\Rightarrow 0<F(x_2)$$

Συνεπώς :

$$(4):\ \Phi(x_1)=\underset{<0}{-x_2}\,\underset{>0}{F(x_2)}+\underbrace{x_1-x_2}_{<0}<0$$

$$(5):\ \Phi(x_2)=\underset{>0}{x_1}\,\underset{>0}{F(x_2)}+\underbrace{x_2-x_1}_{>0}>0$$

Άρα η συνάρτηση Φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $\Phi(\xi) = 0$.

Ακόμη, είναι

$$\Phi'(x) = x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2 = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 > 0$$

γιατί όπως είδαμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Έτσι, η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$, οπότε και '$1-1$' , άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.

2ος τρόπος

Γνωρίζουμε ότι,

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in (0, 2)$$

και επειδή οι συναρτήσεις είναι συνεχείς έχουμε:

$$\int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$\Rightarrow F(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0$$

διότι η f είναι θετική στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Επομένως, $G(x_1) = -F(x_2) < 0$ άρα....