Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) α) Θεωρία **Α1) β)** Θεωρία **Α2)** Θεωρία **Α3)** Θεωρία

Α4) α) Λάθος, $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$ **β)** Λάθος $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$ **Α5)** Σωστό το γ).

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda) = 2 \Leftrightarrow 0+\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Β2. Θεωρούμε συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$h(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με:

$$h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και $1-1$.
Η h είναι συνεχής στο $[2,3] \subseteq \mathbb{R}$

- $h(2) = e^{-2} > 0$
- $h(3) = e^{-3} - 1 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0$

Επομένως $h(2)\cdot h(3) < 0$ και από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2,3)$ κι αφού η h είναι $1-1$ είναι μοναδική.

Β3. Είναι $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$, συνεπώς αντιστρέφεται.
Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \mathbb{R}$ άρα έχει σύνολο τιμών

$f(D_f)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(2,+\infty)$ διότι:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2\right)=2$

Για $x\in\mathbb{R}$ και $y\in(2,+\infty)$ είναι:

$$f(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+2=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-2\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$$

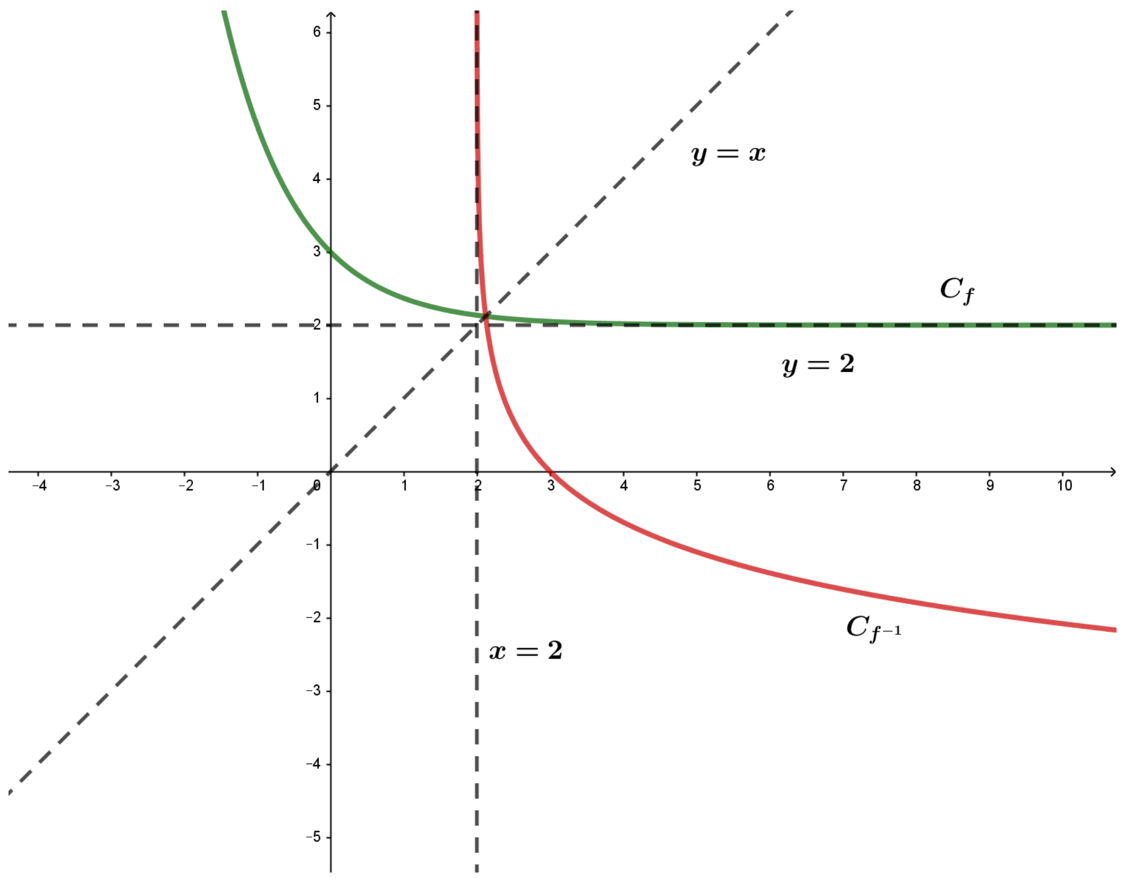
Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2), x\in(2,+\infty)$

B4. Είναι $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right]=\lim\limits_{u\to0^+}(-\ln u)=+\infty$ διότι,

Θέτουμε $u=x-2$ και είναι $\lim\limits_{x\to2^+} u=\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0$

Άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης e^{-x} είναι συμμετρική της e^{x} ως προς τον άξονα $y'y$. Οπότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες πάνω της e^{-x}. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y=x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=1$ άρα και συνεχής στο $x_0=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$ (1)

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=e^0+\beta=1+\beta$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+a$

$f(1)=1+\alpha$

λόγω της (1) θα είναι $1+\alpha=1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\in\mathbb{R}$ (2)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}$$
$$=e^0+\beta=1+\beta$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{2x}{1}=2$$

Λόγω της (2) θα είναι $1+\beta=2\Leftrightarrow\beta=1$ οπότε λόγω της (1) $\alpha=1$

Γ2. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\geq1 \\ e^{x-1}+x & , \quad x<1 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\begin{cases} 2x & , \quad x\geq1 \\ e^{x-1}+1 & , \quad x<1 \end{cases}$

Είναι $2x\geq2>0$ για κάθε $x\geq1$ οπότε $f\nearrow$ στο $[1,+\infty)$

και $e^{x-1}+1>1>0$ για κάθε $x<1$ οπότε $f\nearrow$ στο $(-\infty,1]$.

Επιπλέον η f είναι και συνεχής στο $x_0=1$ άρα $f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Έτσι $f(A)=f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$

Γ3. i. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0)$, οπότε

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(0)\right)=\left(-\infty,e^{-1}\right)$$

διότι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$$

και

$$f(0)=e^{-1}$$

Το $0\in f(A_1)$ συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0$ έχει αρνητική ρίζα x_0 η οποία είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Για $x\in(x_0,+\infty)$ είναι

$$f^2(x)-x_0f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$$

Έχουμε

$$x>x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$$

και

$$f(x)-x_0>0 \text{ για κάθε } x>x_0$$

διότι

$$f(x)>0 \text{ και } x_0<0\Leftrightarrow -x_0>0$$

Οπότε η εξίσωση $f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Γ4. Για $x\geq 1$ έχουμε

$$E=\frac{1}{2}(OK)(KM)=\frac{1}{2}|x||f(x)|=\frac{1}{2}x\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\left(x^3+x\right)$$

Το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου είναι

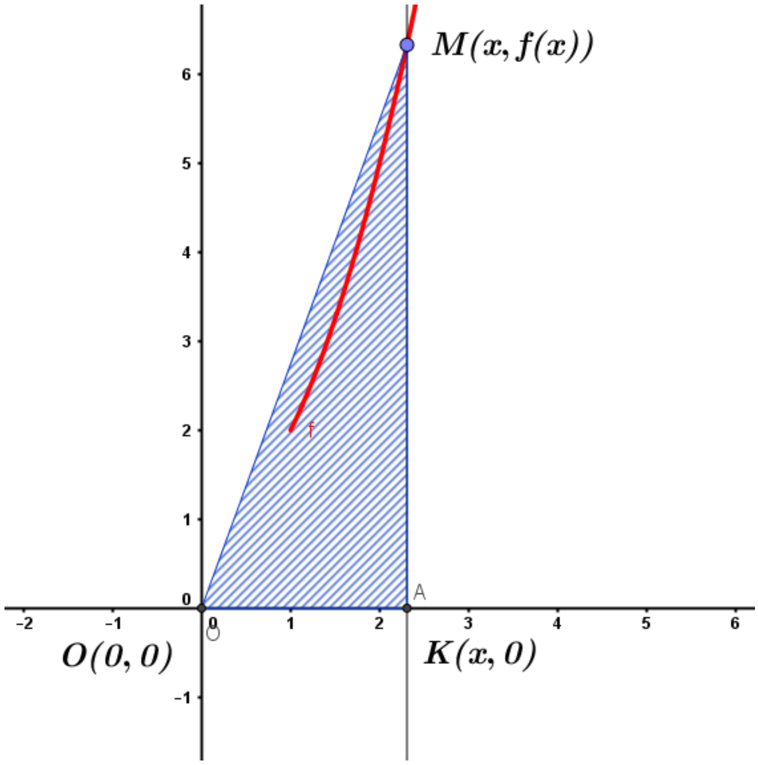
$$E(t)=\frac{1}{2}\left(x^3(t)+x(t)\right)$$

Παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left(3x^2(t)x'(t)+x'(t)\right)$$

Για $t=t_0$ είναι

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}\left(3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)\right)=\frac{1}{2}\left(3\cdot 3^2\cdot 2+2\right)=28cm^2/sec$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$

Οπότε $f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1 \quad (1)$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}(x-1)+\alpha$$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

$$f'(1)=-1 \Leftrightarrow \ln 1+\frac{2(1-1)^2}{1-2+2}+\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-1 \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε $\alpha=-1$ και $\beta=2$

Δ2. $E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx$

Για κάθε $x\in[1,2]$ $\quad f(x)+x-2=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x-2$

$$=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$$

Οπότε $E=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$

x	1	2
u	1	2

Θέτω $x^2-2x+2=u$ άρα $2(x-1)dx=du$

Άρα $E=\int_1^2 \frac{1}{2}\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 u'\ln u du=\frac{1}{2}[u\ln u]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du$

$=\frac{1}{2}(2\ln 2-1\ln 1)-\frac{1}{2}[u]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$ τ.μ.

Δ3. i. Είδαμε ότι :

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$$

Έχουμε

$$f'(x)\geq -1 \Leftrightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$$

Που ισχύει αφού :

$$(x-1)^2+1\geq 1 \overset{\ln x \uparrow (0,+\infty)}{\Rightarrow} \ln\left((x-1)^2+1\right)\geq \ln 1 \Rightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0 \text{ και } \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$$

ii. Η f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$

Όμως

$$f'(\xi)\geq -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq (\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq (\lambda-1)\left(\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)\right)+\frac{3}{2}$$

Δ4.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=-3x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

Έστω $M\left(x_1,f(x_1)\right), N\left(x_2,g(x_2)\right)$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g αντίστοιχα τότε πρέπει,

$f'(x_1)=g'(x_2)$

Όμως από το Δ3i είναι $f'(x_1) \geq -1$, με την ισότητα να ισχύει για $x_1 = 1$ και

$g'(x_2) = -3x_2^{\,2} - 1 \leq -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_2 = 0$

Άρα είναι $M(1, f(1))$ και $N(0, g(0))$ μοναδικά σημεία αφού οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$

Άρα η κοινή τους εφαπτομένη είναι

$$\varepsilon : y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Β΄ τρόπος

Έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_1, f(x_1))$ είναι

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(x_2, g(x_2))$ είναι :

$$y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2) = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

Η C_f και η C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν

$$\left.\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g\,(x_2)x_2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_1) = -3x_2^{\,2} - 1 & (1) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g\,(x_2)x_2 \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

Όμως $f'(x_1) \geq -1$ και $-3x_2^{\,2} - 1 \leq -1$

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει :

$f'(x_1) = -1$ και $-3x_2^{\,2} - 1 = -1 \Leftrightarrow f'(x_1) = -1$ και $x_2 = 0$

Όμως $f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2 + 1\right] + \dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1 = -1$

$$\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2 + 1\right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Αφού $\ln\left[(x-1)^2 + 1\right] \geq 0$ και $\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 1

Άρα $f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x_1 = 1 \text{ και } x_2 \quad 0 \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \; x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 0$$

Αφού επαληθεύουν και την :

$$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

Για $x_1 = 1$ έχουμε :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -1(x - 1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$$