Εξεταζόμενο μάθημα :
Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου

Αναλυτικές λύσεις

Θέμα Α

A1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\zeta<f(\beta)$.
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\zeta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\zeta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\zeta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\zeta=0$, οπότε $f(x_0)=\zeta$. Ομοίως αν $f(\alpha)>f(\beta)$.

A2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

A3. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\left[G(x)\right]_\alpha^\beta=G(\beta)-G(\alpha)$

A4. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

Θέμα Β

B1. Η $f=\dfrac{g}{h}$ ορίζεται όταν: $\begin{cases}x\in D_g\cap D_h\\ h(x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \sqrt{x}^2-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

Είναι $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\dfrac{x+1}{\cancel{\sqrt{x}}}}{\dfrac{x-1}{\cancel{\sqrt{x}}}}=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$

Η $r=g\cdot h$ ορίζεται όταν $x\in D_g\cap D_h=[1,+\infty)$

Είναι $r(x)=g(x)h(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}^2}=x-\dfrac{1}{x}$, $x\geq 1$

B2. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f αντιστρέφεται με δύο τρόπους

1ος τρόπος: Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$f'(x)=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$ άρα $f\searrow(1,+\infty)$ άρα 1-1 και αντιστρέφεται.

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1+1}{x_1-1} = \dfrac{x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 \cancel{-1} = \cancel{x_1 x_2} - x_2 + x_1 \cancel{-1} \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα 1-1 και αντιστρέφεται.

Στην συνέχεια θα βρούμε την αντίστροφη με δύο τρόπους:

1ος τρόπος: (Χρειάζεται μονοτονία) Είναι $f \searrow (1,+\infty)$ και συνεχής άρα:

$f\left((1,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1,+\infty) = D_{f^{-1}}$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ επειδή $x-1>0$ για κάθε x κοντά στο 1 από μεγαλύτερες τιμές.

Για κάθε $x, y \in (1,+\infty)$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$, $y>1$ άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$ και προφανώς $f = f^{-1}$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \quad (1)$

Αν $y=1$ τότε $0=2$ αδύνατο

Αν $y \neq 1$ τότε $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$

Πρέπει $x>1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y-1>0 \Leftrightarrow y>1$ άρα $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$, $y>1$

δηλαδή $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$ και προφανώς $f = f^{-1}$.

Β3. Η r είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(r(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x$. Προφανώς δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Β4. Για κάθε $x>1$ είναι $f^{-1}(f(x)) = x$. Άρα για $x>1$ έχουμε $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1)$ ή $(x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4)$ και επειδή $x>1$ τότε μοναδική ρίζα η $x = 4$.

Θέμα Γ

Γ1. $f(x)=\begin{cases} -2x+4+e^{\lambda} & ,0\le x<2 \\ -x^2+4x-3+\lambda & ,x\ge 2\end{cases}$

Επειδή η f είναι συνεχής τότε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)=1+\lambda \Leftrightarrow e^{\lambda}=\lambda+1\Leftrightarrow \lambda=0$ γιατί $e^x\ge x+1$ για κάθε

$x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα $f(x)=\begin{cases} -2x+5 & ,0\le x<2 \\ -x^2+4x-3 & ,x\ge 2\end{cases}$

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=-2<0$

Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με $f'(x)=-2x+4<0$ για κ

Επειδή η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ τότε $f\searrow[0,+\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=5$.

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2)$ και $(2,3]$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+5-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=-2$ και

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\left(x^2-4x+4\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}}=0$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ επομένως δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[0,3]$.

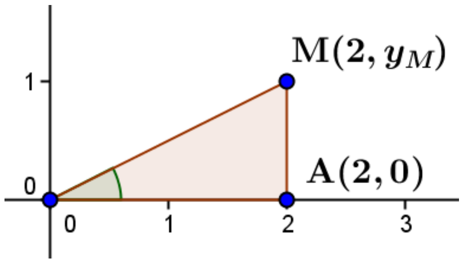
ii) $\lambda_{\Delta E}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{0-5}{3}=-\dfrac{5}{3}$

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -2=-\dfrac{5}{3}$ αδύνατη

Για κάθε $2<x<3$ είναι $f'(x)=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -2x+4=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow 6x-12=5\Leftrightarrow 6x=17\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{6}$ δεκτή γιατί

$2=\dfrac{12}{6}<\dfrac{17}{6}<3=\dfrac{18}{6}$. Άρα η εφαπτόμενη στο $\Gamma(\xi,f(\xi))$ με $\xi=\dfrac{17}{6}$ είναι παράλληλη στην ΔΕ.

Γ4. Είναι $M(2,y(t))$ με $y(0)=0$



$y'(t)=0{,}5\Leftrightarrow y'(t)=(0{,}5t)'\Leftrightarrow y(t)=0{,}5t+c,\ c\in\mathbb{R}$

Για $t=0$ είναι $y(0)=c\Leftrightarrow c=0$ άρα $y(t)=0{,}5t$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το M θα συναντήσει την C_f.

Τότε $y(t_0)=f(2)=1$.

Είναι $\varepsilon\varphi\omega(t)=\dfrac{y(t)}{2}$ άρα $\varepsilon\varphi\omega(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{2}=\dfrac{1}{2}$

$(\varepsilon\varphi\omega(t))'=\dfrac{y'(t)}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=\dfrac{0{,}5}{2}\Leftrightarrow\omega'(t)\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t)+1\right)=\dfrac{1}{4}$ γιατί $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=\varepsilon\varphi^2\omega(t)+1$.

Για $t=t_0$ είναι $\omega'(t_0)\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)+1\right)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\omega'(t)\left(\dfrac{1}{4}+1\right)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\omega'(t)\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\omega'(t)=\dfrac{1}{5}$ rad/sec.

Θέμα Δ

Δ1. Για $x>0$ είναι $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\alpha$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Οπότε $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow 0<x<e$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>e$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$, συνεπώς παρουσιάζει μέγιστο για $x=e$ την τιμή $f(e)=\frac{1}{e}+\alpha$.

Άρα θα είναι $\frac{1}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+1 \Leftrightarrow \alpha=1$.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1=1-\ln 4=\ln e-\ln 4<0$ και $f(1)=1>0$.

Άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Είναι $f\nearrow(0,e]$ άρα στο διάστημα αυτό η f έχει μοναδική ρίζα το x_0.

Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2=[e,+\infty)$ και συνεχής άρα:

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(e)\right]=\left(1,1+\frac{1}{e}\right]$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=0+1=1$, αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Το $0\notin f(A_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $[e,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

Δ3) i) Είναι $f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{\ln 2^2}{4}+1=\frac{2\ln 2}{4}+1=\frac{\ln 2}{2}+1=f(2)$

Είναι $f\nearrow(0,e]$ άρα στο διάστημα αυτό η εξίσωση $f(x)=f(4)=f(2)$ έχει μοναδική λύση την $x=2$.

Είναι $f\searrow[e,+\infty)$ άρα στο διάστημα αυτό η εξίσωση $f(x)=f(4)=f(2)$ έχει μοναδική λύση την $x=4$.

ii) Για κάθε $x>0$ είναι $2^x\le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x}{x}\ge\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}+1\ge\frac{\ln 2}{2}+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$

Για $0<x\le e$ είναι $f(x)\ge f(2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x\ge 2$ άρα τελικά $x\in[2,e]$.

Για $x\ge e$ είναι $f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow f(x)\ge f(4)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x\le 4$ άρα τελικά $x\in[e,4]$.

Άρα τελικά η ανίσωση έχει λύσεις τα $x\in[2,4]$.

Δ4. 1ος τρόπος: Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx$.

Είναι $-\ln 2\le x\le 0 \Rightarrow -x\ge 0 \Leftrightarrow 1-x\ge 1 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \frac{1-x}{e^x}>0$

Άρα έχουμε $E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\right|\frac{1-x}{e^x}dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\right|\left(f\left(e^x\right)\right)'dx=$

Θέτω $f\left(e^x\right)=u$ τότε $\left(f\left(e^x\right)\right)'dx=du$ και για $x=-\ln 2$ είναι $u=f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\ln 4$ ενώ για $x=0$ είναι $u=f(1)=1$.

Άρα $E(\Omega)=\int_{1-\ln 4}^{1}|u|du=\int_{1-\ln 4}^{0}-u\,du+\int_{0}^{1}u\,du=-\left[\frac{u^2}{2}\right]_{1-\ln 4}^{0}+\left[\frac{{}^{2}}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{(1-\ln 4)^2+1}{2}$

$2^{ος}$ τρόπος: Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx$.

Είναι $-\ln 2\le x\le 0\Rightarrow -x\ge 0\Leftrightarrow 1-x\ge 1\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\frac{1-x}{e^x}>0$

Άρα έχουμε $E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln 2}^{0}g(x)dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\right|\frac{1-x}{e^{2x}}e^x dx$

Θέτω $e^x=u\Leftrightarrow x=\ln u$ τότε $e^x dx=du$ και για $x=-\ln 2$ είναι $u=\frac{1}{2}$ ενώ για $x=0$ είναι $u=1$.

Άρα $E(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)|f'(u)du$.

Για $-\frac{1}{2}<x<x_0\overset{f\nearrow(0,e]}{\Rightarrow}f(x)<f(x_0)=0$ και για $x_0<x<1\overset{f\nearrow(0,e]}{\Rightarrow}f(x)>f(x_0)=0$

Άρα $E(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}|f(u)|f'(u)du+\int_{x_0}^{1}|f(u)|f'(u)du=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(u)f'(u)du+\int_{x_0}^{1}f(u)f'(u)du=$

$=-\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{x_0}^{1}=-\frac{f^2(x_0)}{2}+\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(1)}{2}-\frac{f^2(x_0)}{2}=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(1)}{2}=$

$=\frac{(1-\ln 4)^2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{(1-\ln 4)^2+1}{2}$ τ.μ.