ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020
<u>ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ</u>:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΟΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 76 (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)

Α2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της ,όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$$

Α3. **(α)** Ψ

(β) Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f'(0)=0$.

Α4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ)Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } e^x>1\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } x>0\}$

Επομένως $A_{f\circ g}=(0,+\infty)$ και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

Β2. Ας ονομάζουμε για λόγους απλότητας $h(x)=(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}, x>0$

Για κάθε $x>0$ η h παραγωγίσιμη με $h'(x)=\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0$ για κάθε $x>0$ άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $A_h=(0,+\infty)$ οπότε 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της το οποίο θα είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης .

Η h συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_h=(0,+\infty)$ με σύνολο τιμών

$h(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to 0}h(x)\right)=(1,+\infty)$

Άρα το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το $A_{h^{-1}}=(1,+\infty)$

$$h(x)=y\Leftrightarrow\frac{e^x+2}{e^x-1}=y\Leftrightarrow e^x+2=ye^x-y\Leftrightarrow ye^x-e^x=y+2\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+2}{y+1}\right), y>1$$

Επομένως $h^{-1}(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right), x>1$

Β3. Για κάθε $x>1$ η $\varphi(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ ισοδύναμα γράφεται

$\varphi(x)=\ln(x+2)-\ln(x-1)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A_\varphi=(1,+\infty)$ με

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-3}{(x+2)(x-1)}<0$ για κάθε $x>1$ άρα η φ γνησίως φθίνουσα στο $A_\varphi=(1,+\infty)$

Β4. $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, θέτουμε $u=\dfrac{x+2}{x-1}, x>1$ άρα $u_0=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, θέτουμε $u=\dfrac{x+2}{x-1}, x>1$ άρα $u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)=\lim\limits_{u\to1^+}\ln u=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η f συνεχής στο $A_f=\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ θα είναι συνεχής στο $x=0$ και θα ισχύει $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

Δηλαδή $1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0, \lambda>0$,

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-x+1, x>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A_g=(0,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$ για κάθε $x>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_g=(0,+\infty)$ και επειδή η εξίσωση $g(x)=0$ έχει προφανή λύση την $x=1$,λόγω μονοτονίας θα είναι μοναδική .

Άρα $\ln\lambda+\lambda-1=0\Leftrightarrow g(\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=1$

Γ2. Άρα η συνάρτηση είναι : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x\le0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

Θα βρούμε την παράγωγο της f στο $x=0$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(1-x)}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Άρα $f'(0)=1$,επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της f στο $x=0$ και επειδή $f'(0)=1$ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι ίση με $\frac{\pi}{4}$

Γ3. Κρίσιμα σημεία της f πλέον είναι μόνο (αν υπάρχουν) τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η παράγωγος κάνει μηδέν

Για $x<0$ $\quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$

Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ $\quad f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=\frac{5\pi}{4}$$

Άρα τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της είναι $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=\frac{5\pi}{4}$

Γ4. Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο Μ είναι $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

Το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ θα βρεθεί αντικαθιστώντας στη εξίσωση της εφαπτομένης $y=0$ άρα : $-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow x-\alpha=\alpha-1 \Leftrightarrow x=2\alpha-1$

Άρα $B(2\alpha-1,0)$

$x(t)=2\alpha(t)-1$ οπότε $x'(t)=2\alpha'(t)=-\frac{2}{3}\alpha(t)$

Για $t=t_0$ έχουμε $x'(t_0)=-\frac{2}{3}\alpha(t_0)=\frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+2x-e$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής .

Πράγματι : $f''(x)=e^x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η f' συνεχής στο $[0,1]$ και $f'(0)=1-e<0$ ενώ $f'(1)=2>0$ άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ δηλαδή υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0\,\mathbf{(1)}$
το x_0 μοναδικό διότι η f' γνησίως αύξουσα .
Το πρόσημο της f' είναι :

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(x_0) \overset{f'\text{:γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x>x_0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(x_0) \overset{f'\text{:γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x<x_0$$

Επομένως η f στο διάστημα $A_1=(-\infty,x_0]$ είναι γνησίως φθίνουσα ,ενώ στο διάστημα $A_2=[x_0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα .Στη θέση x_0 παρουσιάζει ελάχιστο το $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^{\,2}-ex_0+2$.

$x\ge x_0 \overset{f\text{:γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x)\ge f(x_0)$ **και** $x\le x_0 \overset{f\text{:γνησίως φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(x)\ge f(x_0)$ άρα έχει ολικό ελάχιστο .

$f(x_0)=e^{x_0}+x_0^{\,2}-ex_0-1$ και από την **(1)** $e^{x_0}+2x_0-e=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$

Αντικαθιστώντας προκύπτει $f(x_0)=e-2x_0+x_0^{\,2}-ex_0-1=x_0^{\,2}-(e+2)x_0+e-1$

Δ2.

Α-τρόπος

Για το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$ έχουμε :

- $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ και $f(x)>f(x_0)$ για κάθε $x\neq x_0$

- $\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]\geq\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1$ και επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\right)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$

Β-τρόπος

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\left[1+\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$$

Ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ και για $x\to x_0$ $f(x)>f(x_0)$

Επίσης $\left|\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|=\left|f(x)-f(x_0)\right|\cdot\left|ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|\leq\left|f(x)-f(x_0)\right|$

Άρα $-\left(f(x)-f(x_0)\right)\leq\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leq f(x)-f(x_0)$ και από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\left[1+\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=(+\infty)(1+0)=+\infty$$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ και $g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$ ενώ $g(x_0)=f(x_0)<0$ διότι $x_0<1$ και η f γνησίως αύξουσα άρα $f(x_0)<f(1)\Leftrightarrow f(x_0)<0$,άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο $(x_0,1)$ δηλαδή $g(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)=x_0-\rho$, η ρίζα είναι μοναδική διότι $g'(x)=f'(x)+1>0$ διότι $f'(x)>0$ για κάθε $x>x_0$(ερώτημα Δ1).

Δ4. Η προς απόδειξη σχέση ισοδύναμα γίνεται :

$$f(x_0)>f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right)\Leftrightarrow f(x_0)>(x_0-\rho)\left(f'(k)+1\right)\Leftrightarrow f'(k)+1>\frac{f(x_0)}{x_0-\rho},x_0<\rho$$

Άρα $f'(k)>\dfrac{f(x_0)}{x_0-\rho}-1\Leftrightarrow f'(k)>\dfrac{f(x_0)-x_0+\rho}{x_0-\rho}\Leftrightarrow f'(k)>\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$ **(A)**

Αρκεί να αποδείξουμε την **(A)**

Εφαρμόζουμε Θέωρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_0,\rho]$ άρα υπάρχει $\xi\in(x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{x-x_0}$

Άρα : $\xi<k\Leftrightarrow f'(\xi)<f'(k)\Leftrightarrow\dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}<f'(k)$,εφόσον f' γνησίως αύξουσα