ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 27-1-2024

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A4}$ α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} = \dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{4-x}}$

• $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} - \sqrt{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow 4-x \geq x-2 \Leftrightarrow -2x \geq -6$
$\Leftrightarrow x \leq 3$

x	2		3		4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	
	Τ.Ε		Τ.Μ		Τ.Ε.

$f(2) = \sqrt{2} = f(4) = f_{min}$

$f(3) = 2 = f_{max}$

Από ΘΜΕΤ έχουμε $f(A) = [f_{min}, f_{max}] = [\sqrt{2}, 2]$

Δηλ. $\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$, $\forall x \in [2,4]$

$\boxed{B2}$ $I = \displaystyle\int_2^3 x(\sqrt{x-2} + \cancel{\sqrt{4-x}} - \cancel{\sqrt{4-x}})\,dx = \int_2^3 x\sqrt{x-2}\,dx$

* Θέτουμε $u = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow u^2 = x-2 \rightarrow 2u\,du = dx$

$u_1 = 0$, $u_2 = 1$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} I = \displaystyle\int_0^1 (u^2+2)\cdot u \cdot 2u\,du = \int_0^1 (2u^4 + 4u^2)\,du =$

$\left[\dfrac{2u^5}{5} + \dfrac{4u^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{6+20}{15} = \dfrac{26}{15}$

$\boxed{B3}$ Έχουμε από το $\boxed{B1}$ $2\sqrt{2} \leq 2f(\alpha) \leq 4$

$\sqrt{2} \leq f(\beta) \leq 2$ +

$3\sqrt{2} \leq 2f(\alpha) + f(\beta) \leq 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \dfrac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3} \leq 2 \Rightarrow \dfrac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3} \in f(A)$

$\boxed{B4}$ $2 \le x_0 \le 4 \iff 3 \le x_0+1 \le 5$ άρα $x_0+1 \ge 3$

Έχουμε $f(x) \le 2,\ \forall x \in [2,4]$ οπότε η εξίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{Γ1}$ $f'(x) = \dots = 2x - \frac{4\lambda}{x+1} = \frac{2x^2+2x-4\lambda}{x+1} = \frac{2}{x+1}(x^2+x-2\lambda),\ x>-1$

• $f \uparrow \iff f'(x) \ge 0 \iff x^2+x-2\lambda \ge 0,\ \forall x>-1$ άρα $\Delta \le 0$

$\iff 1+8\lambda \le 0 \iff \boxed{\lambda \le -\frac{1}{8}}$

$\boxed{Γ2}$ $f'(x) = 2x - \frac{4}{x+1} = \frac{2}{x+1}(x^2+x-2)$

x	-1		1		x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		

ΟΕ $= f(1) = 5-4\ln 2$

$\boxed{Γ3}$ α) $(f(x_0)-1)(f(x_0)-3)=0 \iff$

$f(x_0)=1$ ή $f(x_0)=3$

Από το $\boxed{Γ2}$ έχουμε $x_0>1 \overset{f\uparrow}{\iff} f(x_0)>f(1) \iff f(x_0)>5-4\ln 2$

Έστω $f(x_0)=1$, $1>5-4\ln 2 \iff -4>-4\ln 2 \iff 1<\ln 2 \iff e<2$ Άτοπο

άρα $f(x_0)=3$.

β) Θεωρούμε $h(x) = f'(x)+f(x)-3,\ x\in[1,x_0]$

• h συνεχής ως πράξεις συνεχών στο $[1,x_0]$

• $h'(x) = f''(x)+f'(x) = 2+\frac{4}{(x+1)^2}+f'(x) > 0$ αφού $f'(x)>0\ \forall x>1$

• $h(1) = f'(1)+f(1)-3 = f(1)-3 = f(1)-f(x_0) < 0$

$h(x_0) = f'(x_0) > 0$

$h(1)h(x_0)<0$ Θ. Bolzano ...

$\boxed{Γ4}$ $I = \int_0^1 f(u)\,du \overset{*}{=} \int_0^1 (u^2+4-4\ln(u+1))\,du =$

$= \left[\frac{u^3}{3}+4u-4(u+1)\ln(u+1)+4u\right]_0^1 = \frac{1}{3}+4-8\ln 2+4 = \boxed{\frac{25}{3}-8\ln 2}$

* θέτουμε $u=\ln x$, $du=\frac{1}{x}dx$, $u_1=0$ / $u_2=1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Θεωρω $g(x) = e^{f(x)} + x$ με $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$

▷ $2g(x)g'(x) = 2x \Leftrightarrow (g^2(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 + c$

$\Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2+c} \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2+1}$

Για $x=0$: $g^2(0) = c \Leftrightarrow (e^{f(0)} + 0)^2 = c \Leftrightarrow c = 1$

▷ $x^2+1 \neq 0$ άρα $g^2 \neq 0$ οποτε κ' $g \neq 0$ και επειδη g συνεχης στο $\mathbb{R}$ τοτε διατηρει σταθερο προσημο αρα:

$g(x) = \sqrt{x^2+1}$ ή $g(x) = -\sqrt{x^2+1}$

$e^{f(x)} + x = \sqrt{x^2+1}$ ή $e^{f(x)} + x = -\sqrt{x^2+1}$

$e^{f(x)} = \sqrt{x^2+1} - x$ ή $e^{f(x)} = -\sqrt{x^2+1} - x = -(\sqrt{x^2+1} + x)$

Είναι $1 > 0 \Leftrightarrow x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$

$\rightarrow \sqrt{x^2+1} > x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$

$\rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0$

άρα $e^{f(x)} = \sqrt{x^2+1} - x \Leftrightarrow f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \cdot \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

άρα $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ άρα $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x > 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) < 0 \\ x < 0 \underset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$\boxed{\Delta 3}$ (α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot \ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}\cdot x\ln x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot x\ln x \overset{*}{=} f'(0)\cdot 0 = 0$

* $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

β) Θεωρώ $h(x) = \begin{cases} f(x)\cdot \ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

▸ h ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $[0,1]$ αφού για $x=0$ ΕΧΟΥΜΕ $h(0)=\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

ΚΑΙ ΓΙΑ $x>0$ Η h ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΩΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΕΧΩΝ

▸ h ΠΑΡ/ΜΗ ΣΤΟ $(0,1)$ ΩΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΡ/ΜΩΝ

ΚΑΙ ΕΠΕΙΔΗ $h(0)=h(1)=0$ ΤΟΤΕ Θ. Rolle $\exists\, \xi \in (0,1)$:

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)\ln\xi + \frac{f(\xi)}{\xi} = 0$

$\boxed{\Delta 4}$ α) $f''(x) = \frac{1}{x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↗

ΟΕ άρα $f'(x) \geq f'(0) = -1 = f_{min}\ \forall x\in\mathbb{R}$

β)
$$f(|f(x)|) \geq \ln\left(\sqrt{x^2+1} - |x|\right)$$

$$\Leftrightarrow f(|f(x)|) \geq \ln\left(\sqrt{|x|^2+1} - |x|\right)$$

$$\Leftrightarrow f(|f(x)|) \geq f(|x|) \overset{f \downarrow}{\Longleftrightarrow} |f(x)| \leq |x|, \; x \in \mathbb{R}$$

▸ Για $x=0$ ισχύει η ισότητα $|0| \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0$

▸ Για $x \neq 0$: Έστω, $|f(x)| < |x| \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| < 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{-1 < \frac{f(x)}{x} < 1}$$

Έστω, $x>0$: f παρ/μη στο $[0,x]$ από ΘΜΤ $\exists x_1 \in (0,x)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(x)}{x}$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε $-1 \leq f'(x) < 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Για $x = x_1$: $-1 \leq f'(x_1) < 0 \Leftrightarrow -1 < \frac{f(x)}{x} < 0 < 1$

Έστω, $x<0$: f παρ/μη στο $[x,0]$ από ΘΜΤ $\exists x_2 \in (x,0)$

$$f'(x_2) = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x}$$

Για $x = x_2$: $-1 \leq \frac{f(x)}{x} < 0 < 1$

Τελικά, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $-1 < \frac{f(x)}{x} < 1$

2η λυση στα ερωτηματα Δ3 και Δ4

Δ3 > α)

$$\lim_{x\to0^+}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\ln x\right)=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\frac{1}{\ln x}}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{-\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\,\cancel{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=2\cdot0=0.$$

Δ3) β) Θ.ν.δ.ό υπάρχει ρίζα στο $(0,1)$

για την εξίσωση: $(f(x)\cdot \ln x)' = 0$ (1)

Θεωρώ $g(x) = f(x)\ln x$ κ' έστω ότι η (1)

δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$ Τότε $(f(x)\ln x)' \neq 0 \ \forall x \in (0,1)$

κ' $(f(x)\ln x)'$ συνεχής. Άρα $(f(x)\ln x)' > 0 \ \forall x \in (0,1)$

ή $(f(x)\ln x)' < 0 \ \forall x \in (0,1)$. Τότε $g \nearrow$ στο $(0,1)$

ή $g \searrow$ στο $(0,1)$. Έστω $g \nearrow$ στο $(0,1)$

Τότε $g((0,1)) = \left(\lim_{x\to 0^+} g(x), \lim_{x\to 1} g(1)\right) \overset{(\alpha)}{=}$

$= (0,0)$ άτοπο.

Ομοίως αν $g \searrow$ $g(0,1) = (0,0)$ άτοπο

Δ4) α) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f''(x) = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↗

$f'(0) = -1$ Άρα $f'(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

β) $f'(x) \geq -1$ άρα $f'(x) + (x)' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(f(x)+x)' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

— Για $\boxed{x>0}$: $(f(x)+x)' > 0$. Άρα $f(x)+x$ ↑

άρα $f(x)+x > f(0)+0$ άρα $f(x)+x > 0$

ή $\boxed{f(x) > -x}$ (2) $\forall x > 0$.

Όταν $x>0$ τότε $f(x)<0$ άρα $-f(x) > 0$

Θέτω στην (2) όπου x το $-f(x)$ οπότε:

$f(-f(x)) > f(x)$

$f(|f(x)|) > \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

Άρα για $x>0$: $f(|f(x)|) > \ln(\sqrt{x^2+1}-|x|)$