# Διαγώνισμα Γ λυκείου Μαθηματικά 27 – 1 – 2024

## Θέμα Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f ,η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση f θα λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της;

**Α3.** Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής μιας συνάρτησης f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

α) Αν η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο τότε θα παρουσιάζει και (ολικό) μέγιστο.

β) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Α τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Α .

γ) Αν η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε $f'(x) > 0$ .

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα $(\alpha,\beta)$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(A,B)$ όπου $A=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$.

ε) Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$

**Μονάδες 7 – 4 – 4 – 10**

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$, $x\in[2,4]$

**Β1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία ,τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Β2.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_2^3 x\cdot(f(x)-\sqrt{4-x})dx$

**Β3.** Να αποδείξετε ότι για κάθε α,β∈[2,4] υπάρχει ξ∈[2,4] τέτοιο ώστε :

$$f(\xi)=\frac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}$$

**Β4.** Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [2,4]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0 + 1$.

**Μονάδες 8 – 6 – 6 – 5**

## Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4 - 4\lambda \cdot \ln(x+1)$ , $x > -1$ , $\lambda \in R$ .

**Γ1.** Για ποιες τιμές του λ ,η f είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,+∞).

**Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται :**

- $\boldsymbol{\lambda = 1}$
- **$x_0$ ρίζα της εξίσωσης $(f(x) - 1)\cdot(f(x) - 3) = 0$ , $x > 1$ , $x_0 > 1$**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**Γ3.** α) Να δείξετε ότι $f(x_0) = 3$ .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + f(x) = 3$ έχει ακριβώς μια ριζά στο διάστημα $(1,x_0)$.

**Γ4.** Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx$ . **Μονάδες : 5 – 6 – 8**(3-5) **– 6**

## Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει :

- $\left(e^{f(x)} + x\right)\cdot\left(e^{f(x)}\cdot f'(x) + 1\right) = x$ , $x \in R$
- $f(0) = 0$

**Δ1.** Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ , $x \in R$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και στην συνέχεια να βρείτε το πρόσημο της.

**Δ3.** α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)\cdot \ln x) = 0$ .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)\cdot \ln\xi + \frac{f(\xi)}{\xi} = 0$$

**Δ4.** α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f'(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι : $f(|f(x)|) \geq \ln\left(\sqrt{x^2+1} - |x|\right)$ για κάθε $x \in R$ .

**Μονάδες : 6 – 5 – 6**(3-3) **– 8**(3-5)