Διαγώνισμα Β' Λυκείου 28/04/2024

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 49

Α2 Σχολικό Βιβλίο σελ. 25

Α3 Ψευδής

Αιτιολόγηση

Έστω $f(x)=\frac{1}{x}$ $f\downarrow$ με $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

έχουμε $-1<1 \Leftrightarrow f(-1)>f(1) \Leftrightarrow -1>1$ ΑΤΟΠΟ.

ισχύει η $f\downarrow$ στο $(-\infty,0)$, και $f\downarrow$ στο $(0,+\infty)$
όχι όμως στην ένωση

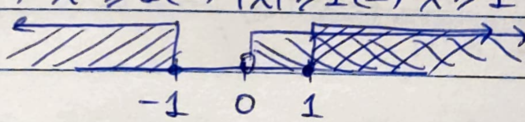
Α4 α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β.

Β1 α) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+\sqrt{x^2-1}-\frac{x}{5}$

πρέπει
$$\begin{cases} \cdot\ \frac{e^x-1}{e^x+1}>0 \overset{e^x+1>0}{\Longleftrightarrow} e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0 \\ \cdot\ e^x+1\neq 0 \text{ ισχύει} \\ \cdot\ x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ ή } x\leq -1. \end{cases}$$

συναληθεύοντας



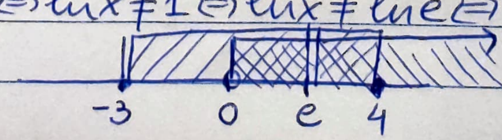
έχουμε $A_f=[1,+\infty)$

β) $g(x)=\sqrt{\frac{4-x}{x+3}}+\frac{1}{\ln x-1}-3x$

πρέπει
$$\begin{cases} \frac{4-x}{x+3}\geq 0 \Leftrightarrow (4-x)(x+3)\geq 0 \\ \qquad x\in[-3,4] \\ x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3 \\ x>0 \\ \ln x-1\neq 0 \Leftrightarrow \ln x\neq 1 \Leftrightarrow \ln x\neq \ln e \Leftrightarrow x\neq e \end{cases}$$

x		-3		4	
$4-x$	+		+	0	−
$x+3$	−	0	+		+
$(4-x)(x+3)$	−		+		−

συναληθεύοντας



$A_f=(0,e)\cup(e,4]$

$\boxed{B2}$ α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+x-6}{x^2-x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} =$

Horner στον αριθμητή $\quad = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+3}{x+1} = \dfrac{9}{3} = 3$

1	-1	1	-6	2
	2	2	6	
1	1	3	0	

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3x+1}-2)(\sqrt{3x+1}+2)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} =$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2} =$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{3x+1}+2)} = \dfrac{3}{4}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x}{x} \underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{\frac{u}{3}} = 3\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u} = 3\cdot 1 = 3.$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+5}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{|x-1|}\cdot(2x+5)\right)$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$ αφού $|x-1|>0$ και $\lim\limits_{x\to 1}(2x+5) = 7.$

άρα $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{|x-1|}\cdot(2x+5)\right) = +\infty.$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-5}{συνx-1}$

Για $x\neq 0$ κοντά στο 0 έχω $συνx<1 \Rightarrow συνx-1<0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{συνx-1} = -\infty$ αφού $συνx-1<0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(3x-5) = -5$

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{συνx-1}\cdot(3x-5)\right) = +\infty$

ΘΕΜΑ Γ

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από $A(1,a)$ και $B(2,\sqrt{a^2+9})$ $a\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\Gamma 1}$ $f(1)=a$ και $f(2)=\sqrt{a^2+9}$

επειδή η f γν. μονότονη θα είναι $\nearrow$ ή $\searrow$

Έστω f γνησίως φθίνουσα τότε έχουμε:

$1<2 \Rightarrow f(1)>f(2) \Rightarrow a>\sqrt{a^2+9}$ άτοπο

αφού $a^2+9>a^2 \Rightarrow \sqrt{a^2+9}>\sqrt{a^2} \Rightarrow \sqrt{a^2+9}>|a|\geq a \Rightarrow$

$\sqrt{a^2+9}>a$

άρα η f γνησίως αύξουσα.

$a=\lim\limits_{x\to 0} x^3\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$

$\boxed{\Gamma 2}$

έχουμε $\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\leq 1 \Leftrightarrow |x^3|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\leq|x^3| \Leftrightarrow \left|x^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\leq|x^3|$

$\Leftrightarrow -|x^3|\leq x^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\leq|x^3|$

$\lim\limits_{x\to 0}(-|x^3|)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}|x^3|=0$

άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=0$.

$\boxed{a=0}$

Επομένως $A(1,0)$ και $B(2,3)$

$\boxed{\Gamma 3}$ Να λυθεί η ανίσωση.

$f(f(\ln x+2)+2)<3 \Leftrightarrow$

πρέπει $x>0$, $f(f(\ln x+2)+2)<f(2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(\ln x+2)+2<2 \Leftrightarrow$

$f(\ln x+2)<0 \Leftrightarrow$

$f(\ln x+2)<f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$\ln x+2<1 \Leftrightarrow$

$\ln x<-1 \Leftrightarrow$

$x<e^{-1} \Leftrightarrow$

$\boxed{x<\frac{1}{e}}$ και $\boxed{x>0}$ συναληθεύοντας

$\boxed{0<x<\frac{1}{e}}$

Η C_f διέρχεται από τα $A(1,0)$ και $B(2,3)$ άρα $f(1)=0$ και $f(2)=3$

$\boxed{\Gamma 4}$ $g(x)=\sqrt{3x-x^2}$

gof πεδίο ορισμού?

$3x-x^2\geq 0 \iff x(3-x)\geq 0 \iff x\in[0,3]$

$A_g=[0,3]$

Η $g(f(x))$ ορίζεται όταν

$\left.\begin{array}{l} x\in A_f \\ f(x)\in A_g\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{R} \\ 0\le f(x)\le 3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{R}\\ f(1)\le f(x)\le f(2)\end{array}\right\} \xRightarrow{f\uparrow} \left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{R}\\ 1\le x\le 2\end{array}\right\}\Rightarrow$

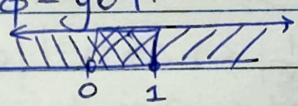
άρα $A_{gof}=[1,2]$

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=\ln x,\ x>0 \qquad g(x)=\sqrt{1-x},\ x\le 1.$

$\boxed{\Delta 1}$ $h=f-g$ και $\phi=gof.$

συναληθεύοντας



$A_f\cap A_g=(0,1]\neq\emptyset$

άρα έχουμε $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$ με $A_{f+g}=(0,1]$

Η $g(f(x))$ ορίζεται όταν: $\left.\begin{array}{l} x\in A_f \\ f(x)\in A_g\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x>0 \\ \ln x\le 1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x>0 \\ \ln x\le \ln e\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x>0 \\ x\le e\end{array}$

$A_{gof}=(0,e]$ και $g(f(x))=\sqrt{1-\ln x}$

άρα $\phi(x)=\sqrt{1-\ln x}$ με $A=(0,e]$

$\boxed{\Delta 2}$ $h(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$, $0<x\le 1.$

για κάθε $x_1,x_2\in A_h$ με $x_1<x_2 \iff \ln x_1<\ln x_2$ (1)

$x_1<x_2\iff -x_1>-x_2\iff 1-x_1>1-x_2\iff\sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}\iff-\sqrt{1-x_1}<-\sqrt{1-x_2}$ (2)

(1)+(2): $\ln x_1-\sqrt{1-x_1}<\ln x_2-\sqrt{1-x_2}\iff h(x_1)<h(x_2)$

άρα h γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

$\phi(x)=\sqrt{1-\ln x}$, $0<x\le e$

για κάθε $x_1,x_2\in A_\phi$ με $x_1<x_2\iff \ln x_1<\ln x_2\iff -\ln x_1>-\ln x_2$

$\iff 1-\ln x_1>1-\ln x_2\iff\sqrt{1-\ln x_1}>\sqrt{1-\ln x_2}\iff\phi(x_1)>\phi(x_2)$

άρα ϕ γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$

$\boxed{\Delta 3}$ α) Η C_h τέμνει τον $x'x$ για $h(x)=0$

$\ln x-\sqrt{1-x}=0.$

παρατηρώ ότι $x=1$ προφανής λύση

αφού $\ln 1-\sqrt{1-1}=0$ άρα η εξ. έχει 1 τουλ. λύση

Η h ως γνησίως μονότονη έχει το πολύ 1 ρίζα

μία το πολύ και μία τουλάχιστον → ακριβώς 1 ρίζα την $x=1$

β) Αν το $\lim_{x\to x_0}\frac{2024}{h(x)}=-\infty$, να βρείτε το x_0.

$\lim_{x\to x_0}\frac{2024}{\ln x-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{h(x)}\cdot 2024\right)$ $\boxed{x_0=1}$ διότι:

αποδείξαμε ότι $h(x)=0 \to x=1$ μοναδική ρίζα

Επίσης για $x<1 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)<h(1) \Rightarrow h(x)<0$ κοντά στο 1

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{h(x)}=-\infty$ αφού $h(x)<0$ και $\lim_{x\to 1}\frac{2024}{h(x)}=-\infty$

$\boxed{\Delta 4}$ Στο $(0,\frac{\pi}{2})$ Να λυθεί η ανίσωση:

$$\ln(\varepsilon\varphi x)>\sqrt{1-\eta\mu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)>\sqrt{1-\eta\mu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow$$

$$\ln(\eta\mu x)-\ln(\sigma\upsilon\nu x)>\sqrt{1-\eta\mu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow$$

$$\ln(\eta\mu x)-\sqrt{1-\eta\mu x}>\ln(\sigma\upsilon\nu x)-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow$$

$$h(\eta\mu x)>h(\sigma\upsilon\nu x) \Rightarrow \text{ αφού } h\nearrow$$

$$\eta\mu x>\sigma\upsilon\nu x \underset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Rightarrow} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}>1 \Rightarrow \varepsilon\varphi x>1 \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x>\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \overset{\varepsilon\varphi x\nearrow}{\Rightarrow} x>\frac{\pi}{4} \text{ άρα } x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$$