Θέμα Α

A_1: Σελ. 95 σχολικό

A_2: Σελ. 73 σχολικό

A_3: Σελ. 99 σχολικό

A_4. 1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Λ 5. Σ

Θέμα Β

$f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $x\neq 0$ $g(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ $x\in(-1,1)$

B_1 $(f\circ g)(x)=?$

$$\left.\begin{array}{l} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x\in(-1,1) \\ g(x)\neq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x\in(-1,1) \\ x\neq 0 \end{array}\right\} x\in(-1,0)\cup(0,1)\neq\varnothing$$

γιατί: $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\neq \ln 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1-x}{1+x}\neq 1 \Leftrightarrow 1-x\neq 1+x \Leftrightarrow$

$2x\neq 0 \Leftrightarrow$

$x\neq 0$

άρα $A_{f\circ g}=(-1,0)\cup(0,1)$

με $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^{g(x)}+1}{e^{g(x)}-1}=\dfrac{e^{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}+1}{e^{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}-1}=\dfrac{\frac{1-x}{1+x}+1}{\frac{1-x}{1+x}-1}=$

$$\dfrac{\dfrac{1\cancel{-x}+1\cancel{+x}}{\cancel{1+x}}}{\dfrac{\cancel{1}-x\cancel{-1}-x}{\cancel{1+x}}}=\dfrac{2}{-2x}=-\dfrac{1}{x}$$

B_2. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

$f'(x)=\dfrac{(e^x+1)'\cdot(e^x-1)-(e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=$

$\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x\cdot(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{\cancel{e^{2x}}-e^x-\cancel{e^{2x}}-e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

$g(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$

$g'(x) = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} =$

$\frac{\cancel{1+x}}{1-x} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^{\cancel{2}}} = \frac{-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{1-x^2}$

B3. i) $\lim\limits_{x\to 1} \ln\frac{1-x}{1+x} = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

γιατί: Θέτω $\frac{1-x}{1+x} = u$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1+x} = 0, \quad u \to 0$

ii) $\lim\limits_{x\to -1} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

γιατί: Θέτω $\frac{1-x}{1+x} = u$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1-x}{1+x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1}(1-x) = 2$

$1+x > 0$ $\quad u \to +\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x-1}$

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1) = 2 > 0$

• για $x>0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(e^x+1)\cdot\frac{1}{e^x-1}\right] = +\infty$

• για $x<0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[(e^x+1)\cdot\frac{1}{e^x-1}\right] = -\infty$

} Δεν υπάρχει το όριο.

B4. Νδο η g αντιστ. και να βρεθεί η g^{-1}

$\underset{\text{"1-1"}}{g(x)} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $\quad x \in (-1,1)$

Έστω $x_1, x_2 \in (-1,1)$ με $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\right) = \ln\left(\frac{1-x_2}{1+x_2}\right) \underset{\text{1-1}}{\overset{\ln x}{\Leftrightarrow}} \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow$

$(1-x_1)(1+x_2) = (1+x_1)(1-x_2) \Leftrightarrow \cancel{1}+x_2-x_1-\cancel{x_1x_2} = \cancel{1}-x_2+x_1-\cancel{x_1x_2}$

$\cancel{2}x_2 = \cancel{2}x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

άρα η f "1-1" οπότε αντιστρέψιμη

$g^{-1}(x) = ?$ $\qquad x \in (-1,1)$

Θέτω $g(x) = y \Leftrightarrow \ln\frac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \Leftrightarrow$

$1-x = (1+x)\cdot e^y \Leftrightarrow 1-x = e^y + xe^y \Leftrightarrow xe^y + x = 1 - e^y \Leftrightarrow$

$x(e^y+1) = 1-e^y \overset{e^y+1\neq 0 \text{ ισχύει}}{\Longleftrightarrow} x = \frac{1-e^y}{e^y+1}$ $\quad e^y+1>0$

πρέπει $-1 < \frac{1-e^y}{e^y+1} < 1 \Leftrightarrow$

$-(e^y+1) < 1-e^y < e^y+1$

$\cancel{-e^y} - 1 < 1 \cancel{-e^y}$ κ' $\cancel{1} - e^y < e^y \cancel{+1} \Leftrightarrow$

$-1 < 1$ ισχύει $\qquad 2e^y > 0$ ισχύει

άρα η $g^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{e^x+1}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Θέμα Γ

f γν. μονότονη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(A)=\mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται απ' τα $A(3,5)$, $B(2,4)$

Γ1. ΝΔο η $f \uparrow$

ΘΔο για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Εφόσον η C_f διέρχεται απ' τα A, B ισχύει:

$f(3) = 5$ κ' $f(2) = 4$

για $x_1 = 3$ κ' $x_2 = 2$

$f(x_1) = 5$ κ' $f(x_2) = 4$

άρα για $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ κ' εφόσον f γν. μονότονη η $f\uparrow$

Γ2. Να λυθούν

i) $f(f(|x|-2)-3) < 4 \Leftrightarrow f(f(|x|-2)-3) < f(2) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}$

$f(|x|-2) - 3 < 2 \Leftrightarrow f(|x|-2) < 5 \Leftrightarrow$

$f(|x|-2) < f(3) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} |x|-2 < 3 \Leftrightarrow |x| < 5 \Leftrightarrow$

$-5 < x < 5$

ii) $f(x)\cdot(f(x)-9) < -20 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 9f(x) + 20 < 0 \Leftrightarrow$

$(f(x)-5)\cdot(f(x)-4) < 0$

$(y-5)(y-4) < 0$

y	$-\infty$		4		5		$+\infty$
$y-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$y-4$		$-$	0	$+$		$+$	
γιν.		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$4<y<5 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(2)<f(x)<f(3) \Leftrightarrow 2<x<3$$

Άρα $x\in(2,3)$

Γ3. Η f είναι γν. μονότονη άρα "1-1" οπότε αντιστρέφεται.

Εφόσον $f\uparrow$ έχουμε:

Έστω $x_1, x_2 \in f(A)$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow$

$$f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(x_2)) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2) \text{ άρα}$$

$$f^{-1}\uparrow$$

Γ4. Να λυθεί:

- για $x\neq 0$ $\quad f\left[f^{-1}\left(x+\frac{4}{x}\right)+1\right]=5 \Leftrightarrow$

$$f\left[f^{-1}\left(x+\frac{4}{x}\right)+1\right]=f(3) \overset{f\text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$f^{-1}\left(x+\frac{4}{x}\right)+1=3 \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}\left(x+\frac{4}{x}\right)=2 \overset{f\text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$f\left(f^{-1}\left(x+\frac{4}{x}\right)\right)=f(2) \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{4}{x}=4 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Θέμα Δ

$f(x)=x+\ln x, \quad x>0, \quad f(A)=\mathbb{R}$

Δ1. Νδο η f αντιστ.

Έστω $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ①

$$x_1, x_2\in(0,+\infty) \text{ με } x_1<x_2 \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln x_1<\ln x_2 \text{ ②}$$

① + ② $\quad x_1+\ln x_1<x_2+\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα

$f\uparrow$ άρα "1-1" οπότε αντιστρέφεται

Το σύνολο τιμών της αντίστροφης είναι το πεδίο ορισμού της f άρα $f^{-1}(A)=(0,+\infty)$

Δ2. Να λυθεί: $\ln\frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}=x^2-\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\ln(\sqrt{x}+1)-\ln(x^2+1)=x^2-\sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\ln(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}=\ln(x^2+1)+x^2 \Leftrightarrow$

$\ln(\sqrt{x}+1)+(\sqrt{x}+1)=\ln(x^2+1)+(x^2+1) \Leftrightarrow$

$f(\sqrt{x}+1)=f(x^2+1) \overset{f\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$ $\quad \sqrt{x}>0,\ x^2>0$

$\sqrt{x}=x^2 \Leftrightarrow$

$x=x^4 \Leftrightarrow x^4-x=0 \Leftrightarrow x(x^3-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x^3=1$

$x=1$

Δ3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+\ln x-x}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=1$

γιατί: Αν θεωρήσουμε $g(x)=\ln x$, $x>0$ τότε:

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=g'(1)$

$g'(x)=\frac{1}{x}$ Άρα $g'(1)=1$

Δ4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $f^{-1}(x)>x$

- Αν $x<0$, εφόσον $A_f=(0,+\infty)$ το $f^{-1}(A)=(0,+\infty)$ άρα η $f^{-1}(x)>x$ ισχύει.
- Αν $x>0$ $\quad f^{-1}(x)>x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$f(f^{-1}(x))>f(x)$

$x>f(x) \Leftrightarrow$

$x>x+\ln x \Leftrightarrow$

$\ln x<0 \Leftrightarrow$

$\ln x<\ln 1 \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} x<1$ άρα $0<x<1$

Αν x = 0 ισχυει $\qquad$ **Τελικα , x < 1**

iii) $f(x) - f^{-1}(2-x) < 0 \Leftrightarrow$

Θέτουμε $g(x) = f(x) - f^{-1}(2-x)$, $x>0$

$f \uparrow$ άρα για $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (1)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2-x_1 > 2-x_2$

$$\overset{f^{-1}\uparrow}{\Longleftrightarrow} f^{-1}(2-x_1) > f^{-1}(2-x_2) \Leftrightarrow$$

$$-f^{-1}(2-x_1) < -f^{-1}(2-x_2) \quad (2)$$

Από (1), (2) $g(x_1) < g(x_2)$ άρα η $g(x) \uparrow$

για $x=1$ $\quad f(1) = 1 \overset{f^{-1}\ 1-1}{\Longleftrightarrow} 1 = f^{-1}(1)$ άρα

η $g(x) = f(x) - f^{-1}(2-x)$ έχει προφανή ρίζα το $x=1$ η οποία είναι μοναδική γιατί η $g \uparrow$.

Οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x) < g(1) \overset{g\uparrow}{\Longleftrightarrow}$$

$$x < 1$$

Άρα $0 < x < 1$