Λύσεις διαγωνίσματος Γ' Λυκείου - 30/3/2024

Θέμα Α $\boxed{A4}$ (α) Λ (β) Σ (γ) Λ (δ) Σ

$\boxed{A5}$ (γ)

Θέμα Β

$\boxed{B1}$ $f'(x) = \dfrac{2(x-2)-(2x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-5}{(x-2)^2} < 0 \ \forall x \neq 2 \rightarrow f \downarrow \Delta_1 = (-\infty, 2)$ και $f \downarrow \Delta_2 = (2, +\infty)$

• $f(\Delta_1) \xlongequal[f \text{ συνεχής}]{f \downarrow \Delta_1} \left(\lim\limits_{x \to 2^-} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 2)$, διότι

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left((2x+1) \dfrac{1}{x-2} \right) = 5 \cdot (-\infty) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x} = 2.$

• $f(\Delta_2) \xlongequal[f \text{ συνεχής}]{f \downarrow \Delta_2} \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \right) = (2, +\infty)$, διότι

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ και

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left((2x+1) \dfrac{1}{x-2} \right) = 5 \cdot (+\infty) = +\infty$

Συνεπώς $f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} - \{2\}$

$\boxed{B2}$ Επειδή η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, δείχνουμε το 1-1 με τον ορισμό.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \dfrac{2x_1+1}{x_1-2} = \dfrac{2x_2+1}{x_2-2} \rightarrow \cancel{2x_1x_2} - 4x_1 + x_2 \cancel{-2} = \cancel{2x_2x_1} - 4x_2 + x_1 \cancel{-2}$

$\rightarrow -5x_1 = -5x_2 \rightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1 και έτσι ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το $D_{f^{-1}} = f(D_f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Για $x \in D_f$ και $y \in f(D_f)$ λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x:

$y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = 2x+1 \Rightarrow x(y-2) = 2y+1 \xrightarrow{y \neq 2} x = \dfrac{2y+1}{y-2} \xrightarrow[x = f^{-1}(y)]{y = f(x)} f^{-1}(y) = \dfrac{2y+1}{y-2}, y \neq 2$

Δηλαδή, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}, x \neq 2$. (Παρατήρηση: είναι $f = f^{-1}$)

$\boxed{B3}$ $f''(x) = \dfrac{5}{(x-2)^4}\, 2(x-2) = \dfrac{10}{(x-2)^3} \neq 0 \ \forall x \neq 2$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	||	$+$
$f(x)$	$\frown$	||	$\smile$

• Κατακόρυφες ασύμπτωτες: Επειδή η f είναι συνεχής, η μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη θα είναι η $x=2$ και αφού από το (B1) έχουμε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, συμπεραίνουμε η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

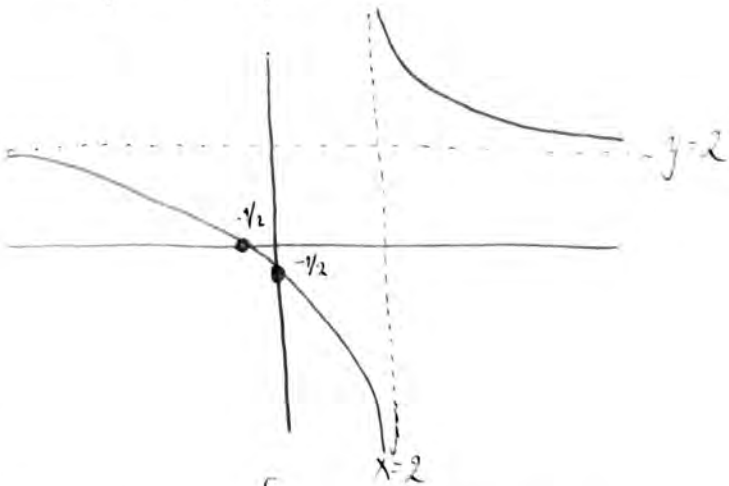
• Πλάγιες/οριζόντιες ασύμπτωτες: Είδαμε στο (B1) ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, άρα η $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και στο $+\infty$

• Σημεία τομής με άξονες: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
$f(0) = -\frac{1}{2}$, άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

Πίνακας μεταβολών (όχι απαραίτητος)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f''(x)$	$-$	||	$+$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$

Γραφική παράσταση



$\boxed{B4}$ Ζητάμε το $E = \displaystyle\int_3^5 |f(x) - 2|\,dx = \int_3^5 \left|\frac{2x+1}{x-2} - 2\right| dx = \int_3^5 \left|\frac{2x+1-2x+4}{x-2}\right| dx =$

$\displaystyle\int_3^5 \frac{5}{|x-2|}\,dx \xrightarrow[x\geq 2]{x\in[3,5]} \int_3^5 \frac{5}{x-2}\,dx = 5\left[\ln(x-2)\right]_3^5 = 5\ln 3$ τ.μ.

Θέμα Γ:

$\boxed{Γ1}$ $f'(x) = -ημx + 2x + α \Rightarrow f''(x) = 2 - συνx > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \cup \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$, δηλαδή $A(0,1) \in C_f$ και επίσης $A \in (ε)$, δηλαδή το A είναι κοινό σημείο των C_f και $(ε)$. Όμως, λόγω κυρτότητας, το μοναδικό κοινό σημείο τους είναι το σημείο επαφής, άρα η $(ε)$ εφάπτεται στη C_f στο A. Συνεπώς $f'(0) = λ_ε = -π \rightarrow \boxed{α = -π}$

<u>άλλος τρόπος</u>: $f \cup \mathbb{R}$ και $(ε)\ y = -πx + 1$ εφαπτομένη της $C_f \Rightarrow f(x) \geq -πx + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε $g(x) = f(x) + πx - 1,\ x \in \mathbb{R}$, είναι $g(x) \geq 0 = g(0) \ \forall x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι εσωτερικό σημείο του $D_g = \mathbb{R}$ και η g είναι παραγ/μη σε αυτό $\xRightarrow{\text{Fermat}} g'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) + π = 0 \Rightarrow α + π = 0 \Rightarrow \boxed{α = -π}$

<u>άλλος τρόπος</u>: $\exists ρ \in \mathbb{R}$ ώστε $\begin{cases} f(ρ) = -πρ + 1 \\ f'(ρ) = -π \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} συνρ + ρ^2 + αρ = -πρ + 1 \\ -ημρ + 2ρ + α = -π \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} α = ημρ - 2ρ - π & (1) \\ συνρ + ρ^2 + αρ + πρ - 1 = 0 & (2) \end{cases}$ και $(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} συνρ + ρ^2 + ρημρ - 2ρ^2 - \cancel{πρ} + \cancel{πρ} - 1 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{συνρ + ρημρ - ρ^2 - 1 = 0}$

οπότε $ρ$ ρίζα της $g(x) = συνx + xημx - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = -\cancel{ημx} + \cancel{ημx} + xσυνx - 2x = x(συνx - 2)$

$g'(x) = 0 \underset{συνx<2}{\Leftrightarrow} x = 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	ομ	$\searrow$

$\rightarrow$ η g παρουσιάζει μέγιστο στη θέση 0, άρα $g(x) \leq g(0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (ισότητα μόνο για $x = 0$)

Συνεπώς: $συνρ + ρημρ - ρ^2 - 1 = 0 \Rightarrow g(ρ) = 0 \Rightarrow ρ = 0$ και έτσι $(1) \xrightarrow{ρ=0} α = -π$.

$\boxed{\Gamma 2}$ Αφού $\alpha = -\pi$, είναι $f(x) = συνx + x^2 - \pi x \Rightarrow f'(x) = -ημx + 2x - \pi$

- f' συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1<0$ και $f'(\pi) = \pi > 0$ άρα $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) f'(\pi) < 0$

$\xrightarrow{Bolzano}$ $\exists x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ τ.ω. $f'(x_0) = 0$ και x_0 μοναδικό αφού $f \cup \mathbb{R}$, δηλαδή $f' \nearrow \mathbb{R}$

$\forall x > x_0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$

$\forall x < x_0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$

x	$-\infty$ $\pi/2$	x_0	π $+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$

$\Rightarrow$ η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 με ελάχιστη τιμή $f(x_0) = συνx_0 + x_0^2 - \pi x_0 < 0$,
διότι $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow συνx_0 < 0$ και $0 < x_0 < \pi \Rightarrow x_0 \cdot (\pi - x_0) = \pi x_0 - x_0^2 > 0$

αλλιώς για το $f(x_0) < 0$: αφού $0 < x_0 < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x_0) < f(0) = -1 < 0 \Rightarrow f(x_0) < 0$

$\boxed{\Gamma 3}$ Αφού f συνεχής

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x + x_0) = f(x_0) < 0$ (από $\boxed{\Gamma 2}$)

και $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(f(x) - f(ημx)\right) = f(0) - f(0) = 0$

$\Rightarrow$ στο όριο εμφανίζεται μορφή $\frac{\alpha}{0}$

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $0 < ημx < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(ημx) > f(x) \Rightarrow f(x) - f(ημx) < 0$ κοντά στο 0^+

$ημx > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

βασική ανισότητα (χωρίς ισότητα)

άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x + x_0)}{f(x) - f(ημx)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(f(x + x_0) \cdot \dfrac{1}{f(x) - f(ημx)} \right) = \underbrace{f(x_0)}_{<0} \cdot (-\infty) = +\infty$

$\boxed{\Gamma 4}$ f κυρτή και (ε) εφαπτομένη της C_f στο $0 \Rightarrow f(x) \geq -\pi x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(ισότητα μόνο για $x = 0$)

Άρα, ζητάμε το $E = \int_0^\pi \left| f(x) - (\pi x + 1) \right| dx = \int_0^\pi \left(συνx + x^2 - \cancel{\pi x} + \cancel{\pi x} - 1 \right) dx =$

$\left[ημx + \frac{x^3}{3} - x \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} - \pi$ τ.μ.

Θέμα Δ:

$\boxed{Δ1}$ (α) Θέτουμε $u=\sqrt{x} \Rightarrow x=u^2 \Rightarrow dx=2u\,du$

x	0	1
u	0	1

, άρα

$$\int_0^1 f(\sqrt{x})e^{-x}dx=\int_0^1 f(u)e^{-u^2}2u\,du=2\int_0^1 x f(x)e^{-x^2}dx$$

(β) $\int_0^1 f^2(\sqrt{x})dx-4\int_0^1 x f(x)e^{-x^2}dx=\frac{e^{-2}-1}{2} \overset{(α)}{\Rightarrow} \int_0^1 f^2(\sqrt{x})dx-2\int_0^1 f(\sqrt{x})e^{-x}dx=\frac{e^{-2}-1}{2} \Rightarrow$

$\int_0^1 \left(f^2(\sqrt{x})-2f(\sqrt{x})e^{-x}\right)dx=\frac{e^{-2}-1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \left(f^2(\sqrt{x})-2f(\sqrt{x})e^{-x}+e^{-2x}\right)dx=\frac{e^{-2}-1}{2}+\int_0^1 e^{-2x}dx \Rightarrow$

$\int_0^1 \left(f(\sqrt{x})-e^{-x}\right)^2dx=\frac{e^{-2}-1}{2}+\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(\sqrt{x})-e^{-x}\right)^2dx=0.$

Η $g(x)=\left(f(\sqrt{x})-e^{-x}\right)^2$, $x\in[0,1]$, είναι συνεχής με $g(x)\geq 0\ \forall x\in[0,1]$ και $\int_0^1 g(x)dx=0$, οπότε θα πρέπει $g(x)=0\ \forall x\in[0,1]$ (σε διαφορετική περίπτωση, αν $\exists x\in[0,1]$ τ.ω. $g(a)\neq 0$, θα είχαμε $g(x)\geq 0\ \forall x\in[0,1]$ με την ισότητα με το μηδέν να μην ισχύει σε όλο το $[0,1]$, άρα θα προέκυπτε πως $\int_0^1 g(x)dx>0$ - ΑΤΟΠΟ) Συνεπώς:

$\forall x\in[0,1]$ $g(x)=0 \Rightarrow f(\sqrt{x})=e^{-x}$ και θέτοντας $u=\sqrt{x}$ * $f(u)=e^{-u^2}$,

δηλαδή τελικά $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in[0,1]$.

(* κάθε $u\in[0,1]$ γράφεται στη μορφή $u=\sqrt{x}$, ~~από~~ για μοναδικό $x\in[0,1]$)

$\boxed{Δ2}$ • $f'(x)=-2xe^{-x^2}<0\ \forall x\in(0,1] \xrightarrow[\text{στο } 0]{f \text{ συνεχής}} f \downarrow [0,1]$

• $f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

$f''(x)=0 \overset{e^{-x^2}>0}{\Longleftrightarrow} x^2=\frac{1}{2} \xrightarrow{x>0} x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x)>0 \Longleftrightarrow x^2>\frac{1}{2} \longrightarrow x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	0		$\sqrt{2}/2$		1
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		∩	ΣΚ	∪	

$\Rightarrow$ η f παρουσιάζει καμπή στη θέση $\frac{\sqrt{2}}{2}$ με $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$, άρα σημείο καμπής της C_f είναι το $K\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, στο οποίο η εφαπτομένη, έστω (ε) διαπερνά τη C_f και έχει εξίσωση (ε): $y-f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow y-\frac{1}{\sqrt{e}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{(ε)\ y=\frac{2-\sqrt{2}x}{\sqrt{e}}}$

Δ3 Περιορισμοί: πρέπει $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \text{και} \\ 0 \le \dfrac{\sqrt{2}-2x}{2} \le 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}-1 \le x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{2}-1<0}$ $0 \le x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• Στο $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ η f είναι κοίλη και η (ε): $y = \dfrac{2-\sqrt{2}x}{\sqrt{e}}$ είναι εφαπτομένη της f στο $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow$ $\boxed{f(x) \le \dfrac{2-\sqrt{2}x}{\sqrt{e}} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ (ισότητα μόνο για } x=\frac{\sqrt{2}}{2})}$ (1)

• Στο $[0,1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα έχει μέγιστο στη θέση 0 με $f(0)=1$

$\Rightarrow$ $\boxed{f\left(\dfrac{\sqrt{2}-2x}{2}\right) \le 1 \quad \forall x \in [0,1] \text{ (ισότητα μόνο όταν } \sqrt{2}-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2})}$ (2)

Αθροίζοντας κατά μέλη τις (1) και (2) $\quad f(x) + f\left(\dfrac{\sqrt{2}-2x}{2}\right) \le \dfrac{2-\sqrt{2}x}{\sqrt{e}} + 1 \Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}-2x}{2}\right) + f(x) \le \frac{2-\sqrt{2}x+\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν ισχύει ισότητα ταυτόχρονα στις (1) και (2), κάτι που συμβαίνει μόνο για $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (και στις δύο). Άρα, για να είναι $f\left(\dfrac{\sqrt{2}-2x}{2}\right) + f(x) = \dfrac{2-\sqrt{2}x+\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$ αναγκαστικά θα είναι $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Δ4 (α) $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $-x^2 \le 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \le 1$ (ισότητα μόνο για $x=0$)
- $e^x \ge x+1$ (ισότητα μόνο για $x=0$) και θεωρώντας το $-x^2$ στη θέση του x θα έχουμε $e^{-x^2} \ge -x^2+1$ (ισότητα μόνο όταν $-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$)

Επομένως $1-x^2 \le e^{-x^2} \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $1-x^2 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in [0,1]$
(ισότητες μόνο για $x=0$)

(β) Ολοκληρώνουμε κατά μέλη τις ανωτέρω ανισότητες, στις οποίες οι ισότητες δεν ισχύουν παντού στο $[0,1]$, οπότε

$$\int_0^1 (1-x^2)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 1\,dx \Rightarrow \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 < \int_0^1 f(x)\,dx < 1 \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3} < \int_0^1 f(x)\,dx < 1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = F(x^2-x+1) + \frac{x}{3} - F(0) - 1$, η οποία ορίζεται όταν:

$\begin{cases} x^2-x+1 \ge 0 \text{ (ισχύει πάντα: } \Delta<0) \\ \text{και} \\ x^2-x+1 \le 1 \Leftrightarrow x^2-x \le 0 \Leftrightarrow x \in [0,1] \end{cases}$ $\longrightarrow D_\varphi = [0,1]$.

- φ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

  (F παρ/μη ως παράγουσα, άρα και συνεχής)

- $\varphi(0) = F(1) - F(0) - 1 = \int_0^1 f(x)dx - 1 < 0$

  $\varphi(1) = F(1) - F(0) - \frac{2}{3} = \int_0^1 f(x)dx - \frac{2}{3} > 0$

  (λόγω της $\frac{2}{3} < \int_0^1 f(x)\,dx < 1$)

$\xRightarrow{\text{Bolzano}}$ $\exists\, x_0 \in (0,1)$ τ.ω. $\varphi(x_0) = 0$