ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (21-9-24)

ΘΕΜΑ 1ο

Δ) 1. ΛΑΘΟΣ 2. ΛΑΘΟΣ 3. ΛΑΘΟΣ

Ε) α-1 , β-3 , γ-2

ΘΕΜΑ 2ο

1. $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$ με $x \neq 1$

$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}, x \neq 1$

$g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, $x \geq 0$ και $x \neq 1 \Rightarrow x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$

$g(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2(x+1)}{x-1}$ οπότε $g'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$ με $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$

$f'(x) = g'(x)$ με $A_{f'} \neq A_{g'}$ οπότε $f' \neq g'$

2. $g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(x+1)}{x-1}$ με $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$

$g'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow g \downarrow$ στο $[0,1)$ και στο $(1,+\infty)$

οπότε είναι "1-1" $\Rightarrow \exists\, g^{-1}$

Έστω $g(x) = y \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} = y \Leftrightarrow 2x + 2 = yx - y \Leftrightarrow x(2-y) = -y-2$

$\xLeftrightarrow{\boxed{y \neq 2}} x = \frac{y+2}{y-2}$

$\begin{cases} x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y \geq 2} \\ \boxed{y \leq -2} \end{cases} \\ \text{και} \\ x \neq 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-2} \neq 1 \Leftrightarrow y+2 \neq y-2 \Leftrightarrow 4 \neq 0 \text{ ισχύει.} \end{cases}$

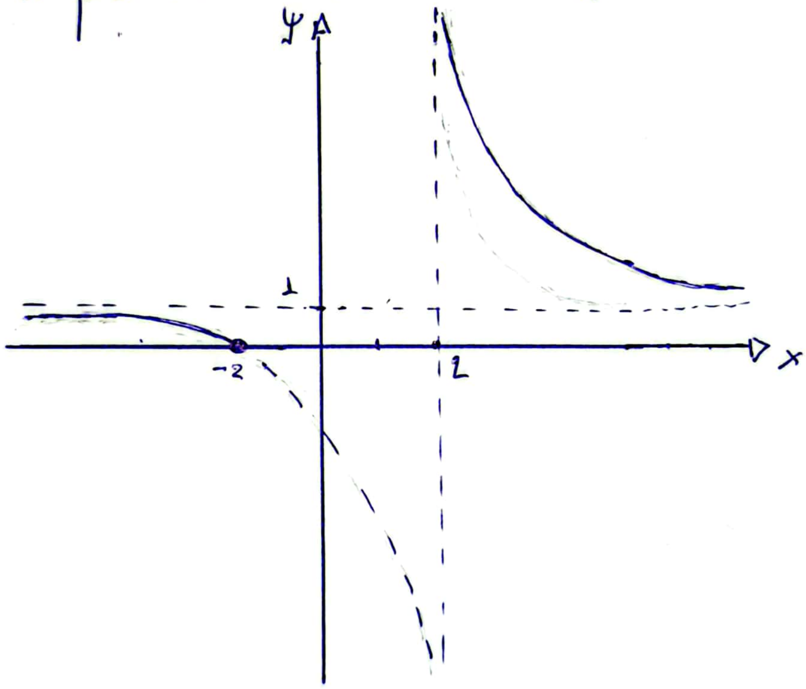
Συνεπώς $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y+2}{y-2} \\ g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) \end{array}\right\} \Rightarrow g^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{y-2}$ ή $\boxed{g^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x-2}}$

$\boxed{A_{g^{-1}} = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)}$

3. $g^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{x-2+4}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-2} + \dfrac{4}{x-2} = 1 + \dfrac{4}{x-2}$

Αν $K(x) = \dfrac{4}{x}$ τότε $g^{-1}(x) = 1 + K(x-2)$.

Άρα η g^{-1} προκύπτει απο την $K(x)$ με μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω και 2 μονάδες προς τα δεξιά.



4. $h(g^{-1}(x)) = \ln(4e) - \ln(x-2) = \ln\dfrac{4}{x-2} + \ln e$

$= \ln|g^{-1}(x) - 1| + 1$

Έστω $g^{-1}(x) = u$ τότε $h(u) = \ln(u-1) + 1$

ή $\boxed{h(x) = \ln(x-1) + 1}$

ΘΕΜΑ 3ο

1. $\eta\mu^2 x - x^4 \le x\cdot f(x) \le \eta\mu^2 x + x^4$

$\xrightarrow{:x>0} \frac{\eta\mu x}{x}\cdot \eta\mu x - x^3 \le f(x) \le \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x + x^3$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x - x^3\right) = 1\cdot 0 - 0 = 0$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x + x^3\right) = 1\cdot 0 + 0 = 0$

Απο κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Αφού η f συνεχής $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(0)=0}$

$\eta\mu^2 x - x^4 \le x\cdot f(x) \le \eta\mu^2 x + x^4$

$\xrightarrow{:x^2\neq 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - x^2 \le \frac{f(x)}{x} \le \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + x^2$

$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 - x^2\right) = 1 - 0 = 1$

$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 + x^2\right) = 1 + 0 = 1$

Απο κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$

• $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$ οπότε $\boxed{f'(0)=1}$

2. $g(x) = \begin{cases} \ln x + 2a, & x \ge 1 \\ 6\cdot e^{x-1}, & x < 1 \end{cases}$

Η g συνεχής για $x=1$ αφού είναι παραγωγίσιμη οπότε

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$

$\lim_{x\to 1^+}(\ln x + 2a) = \lim_{x\to 1^-}(6\cdot e^{x-1}) \Rightarrow \boxed{6 = 2a}$

Η g παραγωγίσιμη για $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x + \cancel{2a} - \cancel{2a}}{x-1} \overset{u(x)=\ln x}{=\!=} \lim_{x\to 1^+} \frac{u(x)-u(1)}{x-1}$$

$$= u'(1) = \frac{1}{1} = 1 .$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{6\cdot e^{x-1} - 2a}{x-1} \overset{6=2a}{=\!=}$$

$$\lim_{x\to 1^-} 6 \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \overset{u=x-1}{=\!=} 6 \lim_{u\to 0^-} \frac{e^u - 1}{u} =$$

$$= 6 \lim_{u\to 0^-} \frac{e^u - e^0}{u-0} \overset{\Sigma(x)=e^x}{=\!=} 6\cdot \lim_{u\to 0} \frac{\Sigma(u)-\Sigma(0)}{u-0}$$

$$= 6\cdot \Sigma'(0) = 6\cdot e^0 = 6$$

Συνεπώς $\boxed{6=1} \xrightarrow{6=2a} \boxed{a=1/2}$

$$g(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1}, & x < 1 \end{cases}$$

- Για $x>1$: $g(x)=\ln x + 1$ και $g'(x) = \frac{1}{x}$
- Για $x<1$: $g(x) = e^{x-1}$ και $g'(x) = e^{x-1}$
- Για $x=1$: έχει αποδειχθεί από ορισμό παραγώγου : $g'(1)=1$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x>1 \\ e^{x-1}, & x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ e^{x-1}, & x<1 . \end{cases}$$

3. $g(x)=\begin{cases} \ln x+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}, & x<1 \end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\geq 1 \\ e^{x-1}, & x<1 \end{cases} \Rightarrow g'(x)>0 \Rightarrow g \nearrow \Rightarrow g$ "1-1"

$\Rightarrow \exists\, g^{-1}$

• Για $x\geq 1$: $g(x)=\ln x+1$

Έστω $g(x)=y \Leftrightarrow \ln x+1=y \Leftrightarrow x=e^{y-1}$

$x\geq 1 \Leftrightarrow e^{y-1}\geq 1 \Leftrightarrow y-1\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 1$

• Για $x<1$: $g(x)=e^{x-1}$

Έστω $g(x)=y \Leftrightarrow e^{x-1}=y \Leftrightarrow x=\ln y+1$ με $y>0$

$x<1 \Leftrightarrow \ln y+1<1 \Leftrightarrow \ln y<0 \Leftrightarrow y<1$

Συνεπώς $\boxed{g^{-1}(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x\geq 1 \\ \ln x+1, & 0<x<1 \end{cases}}$

4. Η εξίσωση $\frac{f'(x)}{x}+\frac{g'(x)}{x-1}=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot f'(x)+x\cdot g'(x)=0$

Έστω $M(x)=(x-1)\cdot f'(x)+x\cdot g'(x)$

Η $M(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών.

$M(0)=-f'(0)=-1$
$M(1)=g'(1)=1$ $\Big\rangle\ M(0)M(1)<0$

Από Θ.Bolzano $\exists\, x_0\in(0,1)$: $M(x_0)=0$ Άρα και η ζητούμενη εξίσωση παρουσιάζει ρίζα.

ΘΕΜΑ 4º

1. $f(x) = (\ln x)^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \cdot \ln(\ln x)}$

$f'(x) = e^{x\cdot \ln(\ln x)} \cdot (x \cdot \ln(\ln x))' =$

$= e^{x\cdot \ln(\ln x)} \cdot \left(\ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) =$

$= e^{x\cdot \ln(\ln x)} \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$

Αφού $x > e \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow \ln(\ln x) > \ln 1 \Leftrightarrow \ln(\ln x) > 0$

οπότε $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$

2. $\lim\limits_{h \to x} \frac{e^h g(h) - e^x g(x)}{h - x} = \lim\limits_{h \to x} \frac{e^h g(h) - e^h g(x) + e^h g(x) - e^x g(x)}{h - x}$

$= \lim\limits_{h \to x} \left[e^h \frac{g(h) - g(x)}{h - x} + g(x) \frac{e^h - e^x}{h - x} \right] = A.$

- $\lim\limits_{h \to x} \frac{g(h) - g(x)}{h - x} = g'(x)$
- $\lim\limits_{h \to x} \frac{e^h - e^x}{h - x} \overset{z(x) = e^x}{=\!=\!=} z'(x) = e^x$

οπότε $A = e^x \cdot g'(x) + g(x) \cdot e^x$

Συνεπώς $e^x g'(x) + e^x g(x) = e^x (g(x) + \ln(e^x + 1) - x)$

$\Leftrightarrow g'(x) + \cancel{g(x)} = \cancel{g(x)} + \ln(e^x + 1) - x$

$\Leftrightarrow \boxed{g'(x) = \ln(e^x + 1) - x}$

- $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^x+1) - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^x+1) - \ln e^x\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\frac{e^x+1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = \ln 1 = 0.$$

- $$\left.\begin{aligned} & g'(x) = \ln(e^x+1) - x = \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) \\ & \frac{1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{e^x} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) > \ln 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow$

Για $x > 1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) = 0$

Για $x < 1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) = 0$

x		1	
$g(x)$	$-$	0	$+$

3. $\lim_{x \to +\infty} \left[g\left(\frac{1}{f(x)}+1\right) \cdot e^{x \cdot \ln(\ln x)}\right] =$

$\lim_{x \to +\infty} \left[g\left(\frac{1}{f(x)}+1\right) \cdot e^{\ln(\ln x)^x}\right] =$

$\lim_{x \to +\infty} \left[g\left(\frac{1}{f(x)}+1\right) \cdot (\ln x)^x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[g\left(\frac{1}{f(x)}+1\right) \cdot f(x)\right]$

έστω $u = \frac{1}{f(x)} + 1$ για $x \to +\infty$ το $u \to u_0$

όπου $u_0 = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{f(x)}+1\right) = 1$ διότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$= \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln(\ln x)} = +\infty$

Έτσι το όριο γίνεται:

$$\lim_{u\to 1}\left(g(u)\cdot\frac{1}{u-1}\right)=\lim_{u\to 1}\frac{g(u)-g(1)}{u-1}=g'(1)\quad (g(1)=0)$$

$$=\ln(e+1)-1.$$

4. $g(x)\cdot(2x-1)+x^2-x=0 \overset{:(x-1)\neq 0}{\Longleftrightarrow}$

$$\frac{g(x)}{x-1}\cdot(2x-1)+x=0$$

Έστω $L(x)=\frac{g(x)}{x-1}\cdot(2x-1)+x$

- $L(0)=g(0)<0$ αφού $g(x)<0$ για $x<1$ (ερώτημα Δ2)
- $\lim_{x\to 1^-}L(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{g(x)}{x-1}(2x-1)+x\right)=g'(1)\cdot 1+1=$

$$=\ln(e+1)\cancel{-1}\cancel{+1}=\ln(e+1)>0$$

οπότε $\exists\ \kappa<1$ κοντά στο 1 : $L(\kappa)>0$

Έτσι $L(0)\cdot L(\kappa)<0$ και $L(x)$ συνεχής $[0,\kappa]$

οπότε από Θ. Bolzano $\exists\ x_0\in(0,\kappa)\subseteq(0,1)$:

$L(x_0)=0$ άρα και η ζητούμενη εξίσωση παρουσιάζει ρίζα στο $(0,1)$.