

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 28 /4/2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Να δείξετε ότι για το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

A2. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Να ορίσετε τη σύνθεση της f με την g . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της ;

A3. Δίνεται ο ισχυρισμός : « Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της ». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$

β) Μια συνάρτηση f καλείται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) < f(x_2)$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

δ) Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$

ε) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Μονάδες 7 - 4 - 4 - 10

ΘΕΜΑ Β

B1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{5}$, β) $g(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x+3}} + \frac{1}{\ln x - 1} - 3x$

B2. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$, β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1}$, γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$, δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5}{|x-1|}$, ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-5}{\sin x - 1}$

Μονάδες 10 - 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, \alpha)$ και $B(2, \sqrt{\alpha^2 + 9})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\text{Αν } \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \sigmaυν \frac{1}{x}$$

Γ2. Να δείξετε ότι $A(1,0)$ και $B(2,3)$.

Γ3. Να λυθεί η ανίσωση $f(f(\ln x + 2) + 2) < 3$

Γ4. Αν $g(x) = \sqrt{3x - x^2}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$.

Μονάδες 6 - 6 - 7 - 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \sqrt{1 - x}$, $x \leq 1$.

Δ1. Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = f - g$ και $\varphi = g \circ f$

$$\text{Δίνεται ότι } h(x) = \ln x - \sqrt{1 - x}, \quad 0 < x \leq 1 \quad \text{και} \quad \varphi(x) = \sqrt{1 - \ln x}, \quad 0 < x \leq e$$

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.

Δ3. α) Να αποδείξετε ότι η C_h τέμνει τον x' σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x = 1$.

β) Να βρείτε τον αριθμό x_0 , ώστε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2024}{h(x)} = -\infty$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ4. Στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$, να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(\varepsilon \varphi x) > \sqrt{1 - \eta \mu x} - \sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x}$$

Μονάδες: 6 - 5 - 7(3-4) - 7