ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

27/4/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat, που αναφέρεται στα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία **Μονάδες 3 + 2**

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής **Μονάδες 3**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1. Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$.
2. Αν για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε και $f(x)>0$ για κάθε x.
3. $\left(\ln|x|\right)'=-\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x<0$.
4. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σε αυτό
5. Αν μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε η f' δεν είναι αρνητική στο Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-6x^2+128-2a=0,\ x\in(0,8),\ a\in(48,64)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Μονάδες 6

Β2. Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, με βάση τετράγωνο πλευράς x και ανοικτό από πάνω, έχει συνολικό εμβαδόν εξωτερικής επιφάνειας, 64 cm^2.

i) Να αποδείξετε ότι ο όγκος του κουτιού δίνεται από τον τύπο $V(x)=\dfrac{64x-x^3}{4},\ x(0,8)$.

ii) Να βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού ώστε να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_V που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{K}(4,\alpha)$, όπου $\alpha\in(48,64)$.

(Δίνεται ότι ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι το γινόμενο των τριών διαστάσεων του)

Μονάδες 7 – 7 – 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(0)=1$ και $f'(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ για κάθε $x \in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. **Μονάδες 4**

Γ2. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και να αποδείξετε ότι η C_f είναι πάνω από αυτή για κάθε x. **Μονάδες 3 +2**

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=\varepsilon\varphi x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ3. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. **Μονάδες 3**

Γ4. Αν $h(x)=(f \circ g)(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ τότε

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $h(x)=-f(x)+2$

iii) Αν η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ και ισχύει $\displaystyle\int_{t(0)}^{t(1)} \left(f(x)+h(x)\right)dx=0$, να δείξετε ότι η t έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

Μονάδες 5 – 5 - 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^x & x \le 0 \\ \ln(x+1) & x>0 \end{cases}$

Δ1. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = - 1 και x= 1. **Μονάδες 2 - 5**

Δ2. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x^2)dx<\frac{1}{3}$. **Μονάδες 4**

Έστω F μια παράγουσα της f στο (-∞ , 0] με $F(0)=0$.

Δ3. Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να δείξετε ότι $F(x) \le xf(x)$ για κάθε x∈[- 1, 0]. **Μονάδες 5**

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x)=\begin{cases} \dfrac{F(x)}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,\ 0]$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $F\left(x^3\right)+x^3F(-1) \ge 0,\ \ x \in [-1,\ 0]$. **Μονάδες 6 - 3**