1.🖂Ζωγράφου:Ι.Χρυσίππου1,☎210 7488030 &ΙΙ.Ξηρογιάννη 10 ,☎210 7488180
2.🖂Χολαργός:Φανερωμένης13,☎210 6536551
3.🖂ΑγίαΠαρασκευή:Ευεργέτου Γιαβάση9,πλατείαΑγ.Παρασκευής,☎2106000031

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

3/01/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε f σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Α2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Α3. Τι ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f ;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος

i) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού, έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

ii) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, όπου f συνεχής συνάρτηση, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$, για κάθε $x \in [a,\beta]$.

iii) Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

iv) Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε $f'(x)=5^{3x}\ln 125$.

v) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της

Μονάδες 7 – 4 – 4 - 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις g , h : $(0,+\infty) \to$ R με τύπους $g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ και $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Β2. Αν $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$,

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στην συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι $f = f^{-1}$.

Β3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $I_1 = \int_2^3 f^{-1}(x)dx$ και $I_2 = \int_0^1 h(x+1)dx$.

Β4.Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει λύση στο $(1,+\infty)$.

Μονάδες : 5 – 6 – 8 – 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=x\cdot \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$.

Γ1. Να δείξετε ότι η g είναι άρτια

Γ2. Να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο με τετμημένη στο $(0,\pi)$.

Γ3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

Γ4. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $t(x)=\dfrac{g'(x)}{x}-\eta\mu x$, $x\in(0,2\pi]$.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t(x)\cdot e^x dx$.

Μονάδες 5 – 5 – 5 – 10 (6-4)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x-\dfrac{1}{x}=0$, $x>1$, έχει ακριβώς μια ρίζα.

Δ2. Δίνεται συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$, 2 φορές παραγωγίσιμη.

i) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$.

ii) Αν επιπλέον $f(e)=e^e$ και $f(x)=x(f(x)-f'(x))\ln x$ για κάθε $x>1$, να βρείτε τον τύπο της f.

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$, $x>1$

Δ3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f καθώς και το πρόσημο της f'.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_2^{\alpha} g(x)dx=(a-1)e^a-e^2$, όπου $g(x)=f(x)+xf'(x)\cdot\ln x$.

Αν θεωρήσουμε $\mathrm{E}(\alpha)=\displaystyle\int_2^{\alpha} g(x)dx$, να υπολογίσετε το $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\left[E(a)+\eta\mu E(a)\right]$.

Μονάδες 4 – 8 (3-5) – 5 – 8 (4-4)