

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

26/7/2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(4 μ)**

A2. Πότε μια συνάρτηση καλείται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της; **(4 μ)**

A3. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό. **(7 μ)**

A4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

2. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$.

3. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

4. Αν $f(x) = 3^x, x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x) = x \cdot 3^{x-1}$.

5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

(10 μ)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \neq 0$ και $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in (-1, 1)$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. **(5 μ)**

B2. Να βρείτε την $f'(x)$ και την $g'(x)$. **(3 - 4 μ)**

B3. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια i) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. **(9 μ)**

B4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη. **(4 μ)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το \mathbb{R} , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 5)$ και $B(2, 4)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα **(3 μ)**

Γ2. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $f(f(|x|-2)-3) < 4$. ii) $f(x)(f(x)-9) < -20$. **(5 - 7 μ)**

Γ3. Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση αντιστρέφεται και να βρείτε τη μονοτονία της αντίστροφης.

(1 - 3 μ)

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f\left[f^{-1}\left(x + \frac{4}{x}\right) + 1\right] = 5$. **(6 μ)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$ και σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της αντίστροφης. **(2 - 2 μ)**

Δ2. Να λυθεί η εξίσωση $\ln \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1} = x^2 - \sqrt{x}$. **(6 μ)**

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1}$. **(5 μ)**

Δ4. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $f^{-1}(x) > x$. **(5 μ)**

ii) $f(x) - f^{-1}(2 - x) < 0$. **(5 μ)**