1. ✉ Ζωγράφου: Ι. Χρυσίππου 1, ☎ 210 7488030 & ΙΙ. Ξηρογιάννη 10 , ☎ 210 7488180
2. ✉ Χολαργός: Φανερωμένης 13, ☎ 210 6536551
3. ✉ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση 9, πλατεία Αγ. Παρασκευής, ☎ 210 6000031

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
www.en-dynamei.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
30/3/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και F μια παράγουσα της f στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ λαμβάνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

(β) Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$, τότε υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\pi$.

(γ) Αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(δ) Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση με $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει τουλάχιστον δύο ετερόσημες τιμές.

Μονάδες 8

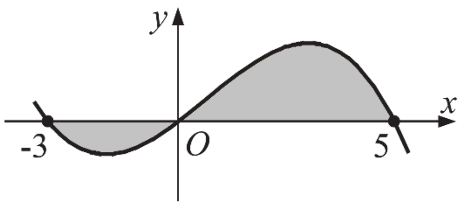
Α5. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με:

(α) $\int_{-3}^{5} f(x)dx$

(β) $\int_{5}^{-3} f(x)dx$

(γ) $\int_{-3}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{5} f(x)dx$

(δ) $-\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{5} f(x)dx$



Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, $x\neq 2$.

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,2)$ και $\Delta_2=(2,+\infty)$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Β2. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα, να βρείτε τις ασύμπτωτές της και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την οριζόντια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=3$, $x=5$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+x^2+\alpha x$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=-\pi x+1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και ότι $\alpha=-\pi$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με $f(x_0)<0$.

Μονάδες 7

Γ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Γ2** στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να υπολογίσετε το:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x+x_0)}{f(x)-f(\eta\mu x)}.$$

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 f^2\left(\sqrt{x}\right)dx-4\int_0^1 xf(x)e^{-x^2}dx=\frac{e^{-2}-1}{2}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

(α) $2\int_0^1 xf(x)e^{-x^2}dx=\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)e^{-x}dx$.

(β) ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in[0,1]$.

Μονάδες 7 (3+4)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε την εφαπτομένη που διαπερνά τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{\sqrt{2}-2x}{2}\right)+f(x)=\frac{2-\sqrt{2}x+\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$.

Μονάδες 6

Δ4. Έστω F μια παράγουσα της f στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $1-x^2\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

(β) η εξίσωση $F\left(x^2-x+1\right)+\frac{x}{3}=F(0)+1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 8 (3+5)