1.✉Ζωγράφου: Ι. Χρυσίππου 1 , ☎210 7488030 & ΙΙ. Ξηρογιάννη 10 , ☎210 7488180
2.✉Χολαργός: Φανερωμένης 13 , ☎210 6536551
3.✉ΑγίαΠαρασκευή:Ευεργέτου Γιαβάση 9,πλατεία Αγ. Παρασκευής , ☎2106000031

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 02/12/2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει : $f'(x) = \frac{1}{x}$. **(Μονάδες 7)**

Α2. Πότε μια ευθεία της μορφής $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ; **(Μονάδες 4)**

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. **(Μονάδες 4)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο απαντήσεων, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , το γράμμα (Σ), αν είναι σωστή ή το γράμμα (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

i. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α,β] και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε ισχύει: $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$.

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε : $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$.

iii. Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ ισχύουν $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 4$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α,β], τότε το σύνολο τιμών της είναι [f(β), f(α)] .

v. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2-5}{x+2}$, $x \neq -2$.

Β1. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f και να βρείτε το πρόσημό της. **(Μονάδες 4+2)**

Β2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . **(Μονάδες 6)**

Β3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει εξίσωση εφαπτομένης , κάθετη στην ευθεία $y = -x$. **(Μονάδες 7)**

Β4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -e^x - 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (-1,0) . **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ με $\alpha,\beta > 0$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό, με $f(\alpha) > 0$ και $f(\beta) > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β) . **(Μονάδες 6)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $\xi \cdot f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$. **(Μονάδες 7)**

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda \in (\alpha,\beta)$ με $\kappa \neq \lambda$ ώστε $f'(\kappa) \cdot f'(\lambda) < 0$. **(Μονάδες 7)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa,\lambda)$ ώστε $f'(x_0) = 0$. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x}{1-x} , & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{2}e^{\alpha x - 1} + \beta , & x \geq 1 \end{cases}$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\frac{1}{e},\sqrt{e}]$. **(Μονάδες 6)**

1.✉Ζωγράφου: Ι. Χρυσίππου 1 , ☎210 7488030 & ΙΙ. Ξηρογιάννη 10 , ☎210 7488180
2.✉Χολαργός: Φανερωμένης 13 , ☎210 6536551
3.✉ΑγίαΠαρασκευή:Ευεργέτου Γιαβάση 9,πλατεία Αγ. Παρασκευής , ☎2106000031

Δ2. Αν $g(x) = \frac{1-x}{x^2} \cdot f(x)$, $0 < x < 1$, να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\frac{1}{e}} g(x)dx$. **(Μονάδες 3-4)**

Δ3. Να λυθεί στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ η ανίσωση $(ημx)^{συνx} > (συνx)^{ημx}$. **(Μονάδες 6)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των C_g και C_h με $h(x) = x^2$, έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη . **(Μονάδες 6)**

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!</u>