Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

Λύσεις διαγωνίσματος 17/12/2023 Β' Λυκείου

Θέμα Α :

(Α1) (α) Λ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Σ (στ) Λ (ζ) Σ (η) Λ

(Α2) (α) iv (β) iv (γ) i

Θέμα Β :

(Β1) (α) $\vec{AB} = (4-2, 6-0) = (2,6)$, $\vec{A\Gamma} = (-1-2, 1-0) = (-3,1)$

$$\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-18) = 20 \neq 0 \Rightarrow$$

$\vec{AB} \not\parallel \vec{A\Gamma} \to A, B, \Gamma$ μη συνευθειακά, άρα ορίζουν τρίγωνο

και $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ τ.μ.

(β) $\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{1-6}{-1-4} = 1$

$B\Gamma: y - y_B = \lambda_{B\Gamma} \cdot (x - x_B) \Rightarrow y - 6 = 1 \cdot (x-4) \Rightarrow \boxed{y = x+2}$

(γ) $A\Delta \perp B\Gamma \Rightarrow \lambda_{A\Delta} \cdot \underbrace{\lambda_{B\Gamma}}_{=1} = -1 \Rightarrow \lambda_{A\Delta} = -1$

$A\Delta: y - \cancel{y_A}^{0} = \lambda_{A\Delta} \cdot (x - x_A) \Rightarrow y = -1 \cdot (x-2) \Rightarrow \boxed{y = -x+2}$

(δ) $x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$ και $y_M = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$

άρα $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ και $\lambda_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{\frac{7}{2} - 0}{\frac{3}{2} - 2} = \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = -7$

$AM: y - \cancel{y_A}^{0} = \lambda_{AM} \cdot (x - x_A) \Rightarrow y = -7 \cdot (x-2) \Rightarrow \boxed{y = -7x+14}$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

(ε) Έστω (ε) η ζητούμενη ευθεία. Τότε:

· $\varepsilon \parallel AM \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{AM} = -7$

· $B\Gamma: y = x+2$, $A\Delta: y = -x+2$ $\Rightarrow \cancel{x}+\cancel{2} = -x+\cancel{2} \Rightarrow x=0 \xrightarrow{y=x+2} y=2$

Συνεπώς, οι ΒΓ και ΑΔ τέμνονται στο $E(0,2)$.

$\varepsilon: y-y_E = \lambda_\varepsilon\cdot(x-\cancel{x_E}) \Rightarrow y-2=-7x \Rightarrow \boxed{y=-7x+2}$

(Β2) (α) Έστω $A=\kappa^2+\kappa-6$, $B=\kappa^2-3\kappa+2$, $\Gamma=\kappa-3$.

(i) Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν:

$A=0$ και $B=0$ $\Rightarrow$ $\kappa^2+\kappa-6=0$ και $\kappa^2-3\kappa+2=0$ $\Rightarrow$ $\kappa=2$ ή $\kappa=-3$ και $\kappa=1$ ή $\kappa=2$ $\Rightarrow \kappa=2$.

Επομένως, η (1) παριστάνει ευθεία ακριβώς όταν $\boxed{\kappa\neq 2}$.

(ii) Πρέπει $\kappa\neq2$ και $A=0 \Leftrightarrow \kappa=2$ ή $\kappa=-3$.

Συναληθεύοντας, κρατάμε $\boxed{\kappa=-3}$

(iii) Πρέπει $\kappa\neq2$ και $B=0 \Leftrightarrow \kappa=1$ ή $\kappa=2$

Συναληθεύοντας, κρατάμε $\boxed{\kappa=1}$

(iv) Πρέπει $\kappa\neq2$ και $\Gamma=0 \Leftrightarrow \kappa=3$

Συναληθεύοντας, κρατάμε $\boxed{\kappa=3}$

(β) Για $\kappa=3$: $(1) \rightarrow (9+3-6)x+(9-9+2)y+0=0 \Rightarrow$

$6x+2y=0 \Leftrightarrow 3x+y=0$.

Προκύπτει η (ε): $3x+y=0$, με:

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|3\cdot2+4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. (α) Λ (β) Λ (γ) Λ (δ) Σ (ε) Λ

Γ2. Σχολικό Βιβλίο - Σελ. 60

Γ3. (α) $(\sqrt{2}\eta\mu x-1)\cdot(2\sigma\upsilon\nu x+1)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu x-1=0$ ή $2\sigma\upsilon\nu x+1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu x=1$

$\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$

ή $x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$ $\kappa\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

(β) $2\eta\mu^2x-3\eta\mu x+1=0$ (1) Θέτουμε $\eta\mu x=\omega$

$2\omega^2-3\omega+1=0$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1>0$

$\omega_{1,2}=\frac{3\pm1}{4}=$ $\to 1$, $\to \frac{1}{2}$

$\eta\mu x=1$ ή $\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2}$

$x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

$\kappa\in\mathbb{Z}$

$\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$

$x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$

$\kappa\in\mathbb{Z}$

(γ) $\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu 3x$

$\Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu(\frac{\pi}{2}-3x)$

$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-3x$

$\Leftrightarrow 5x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}\kappa\pi+\frac{\pi}{10}$

ή $2x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+3x$

$\Leftrightarrow -x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x=-2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$

$\kappa\in\mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\left\{\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(\pi-2x) = -\sigma\upsilon\nu 2x \\ \eta\mu(\frac{\pi}{2}-2x) = \sigma\upsilon\nu 2x \end{array}\right\}$

$f(x) = \sigma\upsilon\nu(\pi-2x) + 4\eta\mu(\frac{\pi}{2}-2x)+1 \Leftrightarrow$

$f(x) = -\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu 2x + 1 \Leftrightarrow$

$f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x + 1$

Δ2. (α) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}$

$-3 \leq 3\sigma\upsilon\nu 2x \leq 3 \overset{+1}{\Leftrightarrow}$

$-2 \leq 3\sigma\upsilon\nu 2x + 1 \leq 4$

(β) $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$

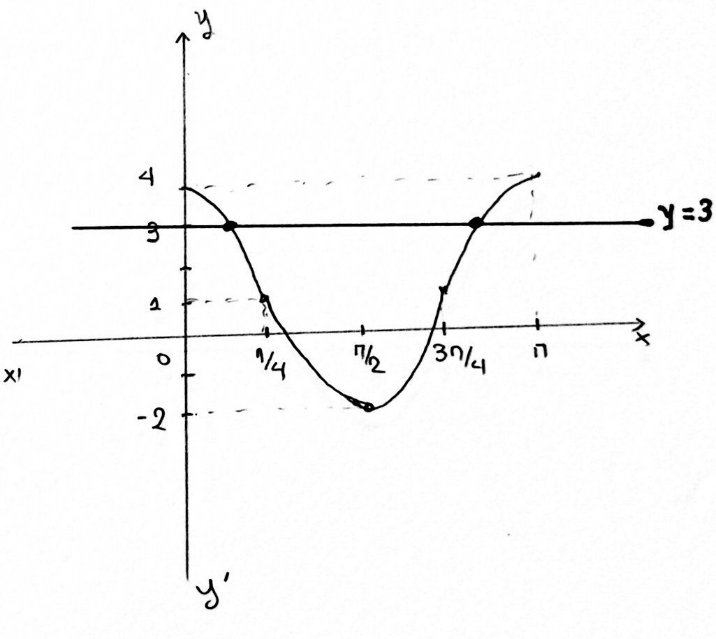
$x = 0 \rightarrow f(0) = 4$

$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow f(\pi/4) = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow f(\pi/2) = -2$

$x = \frac{3\pi}{4} \rightarrow f(3\pi/4) = 1$

$x = \pi \rightarrow f(\pi) = 4$



(γ) Για $x \in [0, \pi/2]$ η f είναι γν. φθίνουσα.
Για $x \in [\pi/2, \pi]$ η f είναι γν. αύξουσα.

(δ) Η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει 2 ρίζες στο $[0, \pi]$

Δ3. $f(x) - 1 = 3\eta\mu 2x$

$\Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu 2x + 1 - 1 = 3\eta\mu 2x$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu 2x$ (1)

(*) $\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = 1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = 1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

$k \in \mathbb{Z}$

<u>Ισχύει $\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0$</u>

Διότι αν $\sigma\upsilon\nu 2x = 0$

(1) $\Rightarrow \eta\mu 2x = 0$

Άτοπο

Δ4.

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = 3\sigma\upsilon\nu 2\frac{x}{2} + 1 = 3\sigma\upsilon\nu x + 1$$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x > 0$

$$\sigma\upsilon\nu x + 1 < \frac{3\sigma\upsilon\nu x + 1}{2\sigma\upsilon\nu x} \overset{2\sigma\upsilon\nu x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x + 1) < 3\sigma\upsilon\nu x + 1 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 3\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$2(\sigma\upsilon\nu x - 1)\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\right) < 0$ (I)

Θέτω $\sigma\upsilon\nu x = \omega$

$2\omega^2 - \omega - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$\omega_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$2\omega^2 - \omega - 1 = 2(\omega - 1)\left(\omega + \frac{1}{2}\right)$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - 1 < 0$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2} > 0$

Άρα (I) ισχύει ως γινόμενο δύο ετεροσήμων παραγόντων.

$k \in \mathbb{Z}$

$\Delta_3 \Rightarrow x \in (0, \pi)$

$0 < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} < \pi$

$-\frac{\pi}{8} < \frac{k\pi}{2} < \frac{7\pi}{8}$

$-\frac{1}{8} < \frac{k}{2} < \frac{7}{8}$

$-\frac{1}{4} < k < \frac{7}{4}$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{8}$