Λύσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών Γ' Λυκείου 2-12-23.

Θέμα Α.

Α1. Θεωρία σελ. 117 Σχολικό

Α2. Θεωρία σελ. 161 -ΙΙ-

Α3. Θεωρία σχολικό σελ. 128

Α4. Σ - Λ - Σ - Λ - Σ

Θέμα Β

Β1. $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2-5)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2+5}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$$

$\Delta=16-20=-4$ Άρα $x^2+4x+5>0$ οπότε $f'(x)>0$. για κάθε $x\neq-2$.

Β2.(α). Κατακόρυφη

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2-5}{x+2}=\lim_{x\to-2^+}(x^2-5)\cdot\frac{1}{x+2}=-1\cdot(+\infty)=-\infty$$

Συνεπώς η $x=-2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

(β). Πλάγια-οριζόντια

Έστω $y=\lambda x+\beta$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-5}{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-5-\cancel{x^2}-2x}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x}=-2$$

οπότε η $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ομοίως και στο $-\infty$.

B3. Για να έχει εξίσωση εφαπτομένης κάθετη στην $y=-x$ πρέπει:

$$f'(x_0)\cdot(-1)=-1$$

Άρα $f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2+4x_0+5}{(x_0+2)^2}=1 \Leftrightarrow$

$x_0^2+4x_0+5=x_0^2+4x_0+4 \Leftrightarrow 1=0$ Αδύνατο.

Άρα, δεν υπάρχει τέτοια εξίσωση εφαπτομένης.

B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+e^x+2$ στο $[-1,0]$

Η g συνεχής στο $[-1,0]$ ως πράξη συνεχών

$g(-1)=f(-1)+e^{-1}+2=-4+\frac{1}{e}+2<0$

$g(0)=f(0)+e^0+2=-\frac{5}{2}+1+2=\frac{1}{2}>0$

Άρα, $g(-1)\cdot g(0)<0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x\in(-1,0)$: $g(x_1)=0 \Leftrightarrow f(x_1)+e^{x_1}+2=0$.

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. Εφόσον η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ και

$f(\alpha)>0$ και $f(\beta)>0$ υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$: $f(\gamma)<0$

και εφόσον f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta] \Rightarrow f$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Έχουμε: Η f συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ και $[\gamma,\beta]$

$f(\alpha)\cdot f(\gamma)<0$ και $f(\beta)\cdot f(\gamma)<0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(\alpha,\gamma)$:

$f(x_1)=0$ και ένα $x_2\in(\gamma,\beta)$: $f(x_2)=0$

Γ2. $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi^2\cdot f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^2\cdot f(x)$ στο $[x_1,x_2]\subseteq[\alpha,\beta]$

Η h συνεχής στο $[x_1,x_2]$

h παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2)

$h(x_1)=h(x_2)=0$ από το $(Γ_1)$

Από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)$:

τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi^2(f'(\xi))+2\xi f(\xi)=0$

$\Leftrightarrow \xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

Γ3. • Η f συνεχής στο $[\alpha, x_1]$

f παραγωγίσιμη στο (α, x_1)

Από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa \in (\alpha, x_1)$:

$$f'(\kappa) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{-f(\alpha)}{x_1 - \alpha} < 0.$$

διότι $f(\alpha) > 0 \Rightarrow -f(\alpha) < 0$, $f(x_1) = 0$ και $x_1 - \alpha > 0$

• Η f συνεχής στο $[x_2, \beta]$

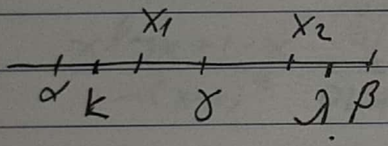
f παραγωγίσιμη στο (x_2, β)

Από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda \in (x_2, \beta)$:

$$f'(\lambda) = \frac{f(\beta) - f(x_2)}{\beta - x_2} = \frac{f(\beta)}{\beta - x_2} > 0$$

διότι $f(\beta) > 0$ και $\beta - x_2 > 0$ και $f(x_2) = 0$.

Γ4. Από τα προηγούμενα υποερωτήματα έχουμε:



οπότε:

f συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq [\kappa, \lambda]$

f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

Από Θ. Rolle υπάρχει τουλ. ένα $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (\kappa, \lambda)$:

$f'(x_0) = 0$.

Θέμα 1

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x}, & 0<x<1 \\ -\dfrac{1}{2}e^{\alpha x-1}+\beta, & x\geq 1 \end{cases} \quad \text{στο } \left[\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right]$$

Δ1. Απαιτούμε την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στο $x_0=1$.

Συνέχεια στο $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x\ln x}{1-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x+1}{-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{2}e^{\alpha x-1}+\beta\right)=-\frac{1}{2}e^{\alpha-1}+\beta=f(1).$$

οπότε πρέπει: $-\frac{1}{2}e^{\alpha-1}+\beta=-1.$ (1)

Παραγωγισιμότητα στο $x_0=1$

• $$\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x\ln x}{1-x}-\left(-\frac{1}{2}e^{\alpha-1}+\beta\right)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x\ln x}{1-x}+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x\ln x+1-x}{1-x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\ln x+1-x}{-(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{+\ln x+\cancel{1}-\cancel{1}}{-2(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{1/x}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

• $$\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{2}e^{\alpha x-1}+\beta-\left(-\frac{1}{2}e^{\alpha-1}+\beta\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{2}\left(e^{\alpha x-1}-e^{\alpha-1}\right)}{x-1}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{2}e^{\alpha x-1}\cdot\alpha}{1}=-\frac{1}{2}e^{\alpha-1}\cdot\alpha$$

Πρέπει: $-\frac{1}{2}e^{\alpha-1}\cdot\alpha=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\alpha-1}\cdot\alpha=1 \Leftrightarrow e^{\alpha-1}\cdot\alpha-1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^{x-1}\cdot x-1$ στο $\left[\frac{1}{e},\sqrt{e}\right]$

$\varphi'(x)=e^{x-1}\cdot x+e^{x-1}=e^{x-1}\cdot(x+1)>0$ η $\varphi \nearrow$ στο $\left[\frac{1}{e},\sqrt{e}\right]$

με $\varphi(1)=0$ Άρα το 1 μοναδική ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},\sqrt{e}\right]$

Συνεπώς $\alpha=1$ και $\beta=-\frac{1}{2}$

Δ2. $g(x) = \frac{1-x}{x^2} \cdot \frac{x\ln x}{1-x} = \frac{\ln x}{x}$ στο $(0,1)$.

Η g παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με,

$$g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} > 0 \text{ στο } (0,1).$$

η $g \nearrow$ στο $(0,1)$.

• $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1/e} \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1/e} \frac{(\ln^2 x)'}{2} dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{1/\sqrt{e}}^{1/e}$

$= \frac{(\ln e^{-1})^2 - (\ln e^{-1/2})^2}{2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$.

Δ3. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} > (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow$

$\ln(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} > \ln(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x \ln(\eta\mu x) > \eta\mu x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x)$ $\quad (\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x > 0)$

$\frac{\ln(\eta\mu x)}{\eta\mu x} > \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

$g(\eta\mu x) > g(\sigma\upsilon\nu x)$ $\quad \left(\begin{array}{l} 0 < \eta\mu x < 1 \\ 0 < \sigma\upsilon\nu x < 1 \end{array}\right)$

$\overset{g \nearrow}{\Leftrightarrow}$ $\eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x > 0$.

Θεωρούμε την $K(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$K'(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x > 0$. άρα $K \uparrow$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

με $K\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ Μοναδική ρίζα

Άρα για $x > \frac{\pi}{4} \overset{K\nearrow}{\Rightarrow} K(x) > K\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x > 0$

$x < \frac{\pi}{4} \overset{K\nearrow}{\Rightarrow} K(x) < K\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x < 0$ Απορρίπτ.

Συνεπώς $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ4. $g(x)=\frac{\ln x}{x}$, $h(x)=x^2$, $x\in(0,1)$

Θεωρούμε γενική μορφή εξίσωσης εφαπτομένης της C_g στο x_0 και της C_h στο x_1

έχουμε:

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$

$y-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}(x-x_0)$

$y=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}x-\frac{1-\ln x_0}{x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0}$

$y=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\cdot x+\frac{2\ln x_0-1}{x_0}$

$y-h(x_1)=h'(x_1)(x-x_1)$

$y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$

$y=2x_1\cdot x-2x_1^2+x_1^2$

Άρα, $y=2x_1x-x_1^2$

Απαιτώντας οι δύο εξισώσεις να ταυτίζονται έχουμε:

$$\begin{cases}\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}=2x_1 \Leftrightarrow x_1=\frac{1-\ln x_0}{2x_0^2}\\ \text{και}\\ \frac{2\ln x_0-1}{x_0}=-x_1^2\end{cases}$$

οπότε: $\frac{2\ln x_0-1}{\cancel{x_0}}=-\frac{(1-\ln x_0)^2}{4x_0^{\cancel{4}\,3}}\Leftrightarrow$

$4x_0^3\cdot(2\ln x_0-1)=-(1-\ln x_0)^2\Leftrightarrow$

$4x_0^3(2\ln x_0-1)+(1-\ln x_0)^2=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=4x^3(2\ln x-1)+(1-\ln x)^2$, $x\in(0,1)$

Παρατηρούμε ότι:

$\lim_{x\to0^+}t(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to1^-}t(x)=-3<0$

διότι,

$\lim_{x\to0^+}4x^3(2\ln x-1)=\lim_{x\to0^+}4\cdot\frac{2\ln x-1}{\frac{1}{x^3}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to0^+}4\cdot\frac{\frac{2}{x}}{\frac{-3}{x^4}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{8}{3}x^3=0$

και $\lim_{x\to0^+}(1-\ln x)^2=+\infty$

Οπότε κοντά στο 0 υπάρχει $x_2\in(0,1)$: $t(x_2)>0$

και " " 1 " $x_3\in(0,1)$: $t(x_3)<0$

Συνεπώς η t συνεχής στο $[x_2,x_3]$ και $t(x_2)\cdot t(x_3)<0$

Από Θ.Β. υπάρχει $x_0\in(x_2,x_3)\subseteq(0,1)$: $t(x_0)=0$