Λύσεις διαγωνίσματος Γ' λυκείου 13/4/2023

ΘΕΜΑ Α

Α1-γ   Α2-γ   Α3-δ   Α4-α   Α5 ΣΣΛΣΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1-α Ισχύει $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) = \lambda + \lambda_c(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)$

Για τα φωτόνια που σκεδάζονται με το μέγιστο δυνατό μήκος κύματος ισχύει $\varphi = 180^0 \rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = -1$ οπότε

$\lambda'_{max} = 2\lambda_c + \lambda_c[1-(-1)] \Rightarrow \lambda'_{max} = 4\lambda_c$

Για την κινητική ενέργεια του αναπηδούμενου ηλεκτρονίου ισχύει: $E = E' + K_e \Rightarrow K_e = E - E'$

όπου $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$ και $E' = hf' = \frac{hc}{\lambda'}$

Οπότε $K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{2\lambda_c} - \frac{hc}{4\lambda_c} \Rightarrow K_e = \frac{hc}{4\lambda_c}$

Αντίστοιχα για $\varphi = 90^\circ \rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 0$ έχουμε:

$\lambda' = 2\lambda_c + \lambda_c \Rightarrow \lambda' = 3\lambda_c$

και $K'_e = E - E'' = \frac{hc}{2\lambda_c} - \frac{hc}{3\lambda_c} \Rightarrow K'_e = \frac{hc}{6\lambda_c}$

Άρα $\frac{K'_e}{K_e} = \frac{hc/6\lambda_c}{hc/4\lambda_c} \Rightarrow \boxed{\frac{K'_e}{K_e} = \frac{2}{3}}$ (α)

Β2-γ Εύρεση ταχύτητας Σ_1 πριν την κρούση:

ΘΜΚΕ$_{1\rightarrow 2}$: $K_{(2)} - K_{(1)} = W_{m_1 g} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = m_1 g \ell$

$\Rightarrow v_1^2 = v_0^2 + 2g\ell = 6g\ell + 2g\ell \Rightarrow v_1^2 = 8g\ell \Rightarrow v_1 = \sqrt{8g\ell}$

Εύρεση ταχύτητας Σ_1 αμέσως μετά την κρούση:

ΘΜΚΕ$_{2\rightarrow 1}$ $K'_{(1)} - K'_{(2)} = W^{1\rightarrow 2}_{m_1 g} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = -m_1 g\ell \Rightarrow v_1' = \sqrt{2g\ell}$

Ισχύει $\upsilon_1 = \sqrt{8g\ell} = 2\sqrt{2g\ell} = 2\upsilon_1' \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{\upsilon_1}{2}$ κατά μέτρο.

Κεντρική ελαστική κρούση

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \xrightarrow{\vec{\upsilon}_1 \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}_1'} -\frac{\upsilon_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow -m_1 - m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow \underline{\underline{m_2 = 3m_1 = 3m}}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2m_1}{4m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{\upsilon_1}{2}$$

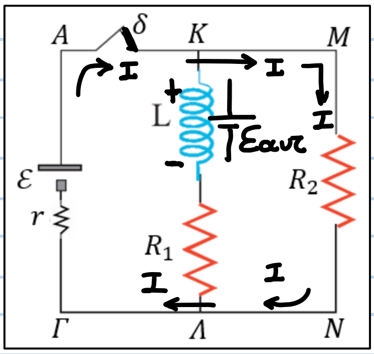
Για την ααΤ του Σ_2 ισχύει $\upsilon_2' = \upsilon_{max} \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{2} = \upsilon_{max}$

$$\Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{\sqrt{8g\ell}}{2} = \frac{2\sqrt{2g\ell}}{2} \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{2g\ell}$$

Στη ΘΦΜ και ΘΙ της ααΤ : $U_{ταλ\,max} = K_{max} = \frac{1}{2}m_2 \upsilon_2'^2$

$$\Rightarrow U_{ταλ\,max} = \frac{1}{2}3m_1\,2g\ell \Rightarrow \boxed{U_{ταλ\,max} = 3mg\ell} \quad (γ)$$

$\boxed{\text{B3} \quad \text{I} - β,\ \text{II} - β,\ \text{III} - γ}$



I) Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο κλάδος ΚΛ του πηνίου, λόγω της αυτεπαγωγής, δε διαρρέεται από ρεύμα.

Από ρεύμα διαρρέονται οι υπόλοιποι κλάδοι του κυκλώματος δηλαδή οι ΑΓ και ΜΝ (β)

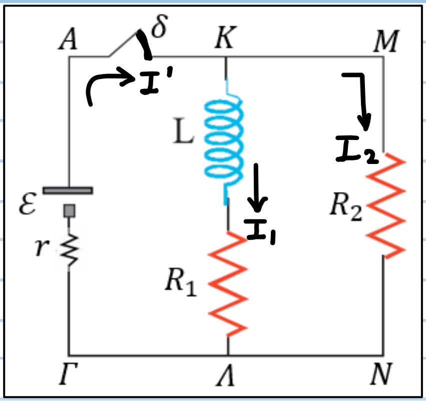
II) Τη χρονική στιγμή $t=0$ ισχύει $I = \frac{E}{R_{ολ}}$ όπου

$$R_{ολ} = r + R_2 = \frac{3R}{2} \quad \text{οπότε} \quad I = \frac{E}{3R/2} \Rightarrow I = \frac{2}{3}\frac{E}{R}$$

Ισχύει $V_{KΛ} = V_{MN} = V_{R_2} = IR_2$

$$\Rightarrow |E_{αυτ}| = IR_2 \Rightarrow L\frac{di}{dt} = \frac{2}{3}\frac{E}{R}\cdot R \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = +\frac{2E}{3L}} \quad (β)$$

III) Για τις τελικές τιμές των ρευμάτων στο κύκλωμα ισχύει $I' = I_1 + I_2$



$V_{R_1} = V_{R_2} \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow I_1 = I_2$

οπότε $I' = 2I_1 \Rightarrow I_1 = I'/2$

Επίσης $R'_{ολ} = r + \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{2} = R$

Άρα $I' = \dfrac{\mathcal{E}}{R'_{ολ}} = \dfrac{\mathcal{E}}{R} \longrightarrow I_1 = \dfrac{I'}{2} = \dfrac{\mathcal{E}}{2R}$

Μετά το άνοιγμα του διακόπτη όταν $Q_{R_{1,2}} = 75\%\, U_{Bmax}$ ισχύει $U_B = 25\%\, U_{Bmax} \Rightarrow \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} L I_1^2 \Rightarrow i = I_1/2 = \dfrac{\mathcal{E}}{4R}$

Επίσης $|\mathcal{E}_{αυτ}| = i R_{1,2}$ όπου $R_{1,2} = R_1 + R_2 = 2R$

$$\Rightarrow L\left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot 2R \Rightarrow \left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{\mathcal{E}}{2L} \longrightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{2L}} \quad (γ)$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται $hc = 1200\ eV \cdot nm$, $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$ $1eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19} J$

$m_e = 9 \cdot 10^{-31} kg$ $A = 24\ cm^2$ $\phi = 2{,}4 eV$ $I = 32 \dfrac{mW}{cm^2}$, $\lambda = 300 nm$

Γ1 Για την ένταση της ακτινοβολίας ισχύει:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{E_{ακτ}}{t \cdot A} = \frac{N_\varphi \cdot hf}{t \cdot A} = \frac{N_\varphi}{t} \frac{hc}{\lambda \cdot A}$$

$$\Rightarrow I = \frac{N_\varphi}{t} \frac{hc}{\lambda \cdot A} \Rightarrow \frac{N_\varphi}{t} = \frac{\lambda \cdot A \cdot I}{hc} = \frac{300 \cancel{nm} \cdot 24 \cancel{cm^2} \cdot 32 \frac{mW}{\cancel{cm^2}}}{1200\ eV \cdot \cancel{nm}}$$

$$\Rightarrow \frac{N_\varphi}{t} = \frac{24 \cdot 32 \cdot 10^{-3}\ W}{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J} = 120 \cdot 10^{16} \frac{φωτ}{sec} \Rightarrow \boxed{\frac{N_\varphi}{t} = 12 \cdot 10^{17} \frac{φωτόνια}{sec}}$$

Γ2 Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein

$$hf = K_{max} + \phi \xrightarrow{K_{max} = 0} hf_0 = \phi \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_0} = \phi \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{\phi}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{1200 eV \cdot nm}{2{,}4 eV} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 500\ nm}$$

Γ3 Για την τάση αποκοπής V_0 κανένα ηλεκτρόνιο δε φτάνει στην άνοδο ($K_{αν}=0$). Από ΘΜΚΕ: $K_{αν} - K_{καθ} = W_{F_{ηλ}}$

$$\Rightarrow -K_{max} = -eV_0 \Rightarrow K_{max} = eV_0$$

Έχουμε: $hf = K_{max} + \phi \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = eV_0 + \phi$

$$\Rightarrow \frac{1200\, eV \cdot nm}{300\, nm} = eV_0 + 2{,}4eV \Rightarrow 4eV = eV_0 + 2{,}4eV$$

$$\Rightarrow \cancel{e}V_0 = 1{,}6\cancel{e}V \Rightarrow \boxed{V_0 = 1{,}6V}$$

Γ4 $f' = f - 25\% f = f - \frac{1}{4}f \Rightarrow f' = \frac{3}{4}f \Rightarrow \frac{c}{\lambda'} = \frac{3}{4}\frac{c}{\lambda}$

$$\Rightarrow \lambda' = \frac{4}{3}\lambda = \frac{4}{3}300nm \Rightarrow \lambda' = 400nm.$$

Ισχύει $hf' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1200\, eV \cdot nm}{400\, nm} \Rightarrow hf' = 3eV$

Έχουμε: $hf' = K'_{max} + \phi \Rightarrow 3eV = K'_{max} + 2{,}4eV \Rightarrow \underline{K'_{max} = 0{,}6eV}$

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ: $K'_{αν} - K'_{καθ} = W_{F_{ηλ}} \Rightarrow K'_{αν} - 0{,}6eV = e \cdot V$

$$K'_{αν} - 0{,}6eV = 2{,}6eV \Rightarrow K'_{αν} = 3{,}2eV = 3{,}2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J$$

Όμως $K'_{αν} = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{P^2}{2m_e} \Rightarrow P^2 = 2m_e \cdot K'_{αν} \Rightarrow P = \sqrt{2m_e K'_{αν}}$

$$\Rightarrow P = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}\, kg\, m/s = \sqrt{9 \cdot 3{,}2^2 \cdot 10^{-50}}\, kg\, m/s.$$

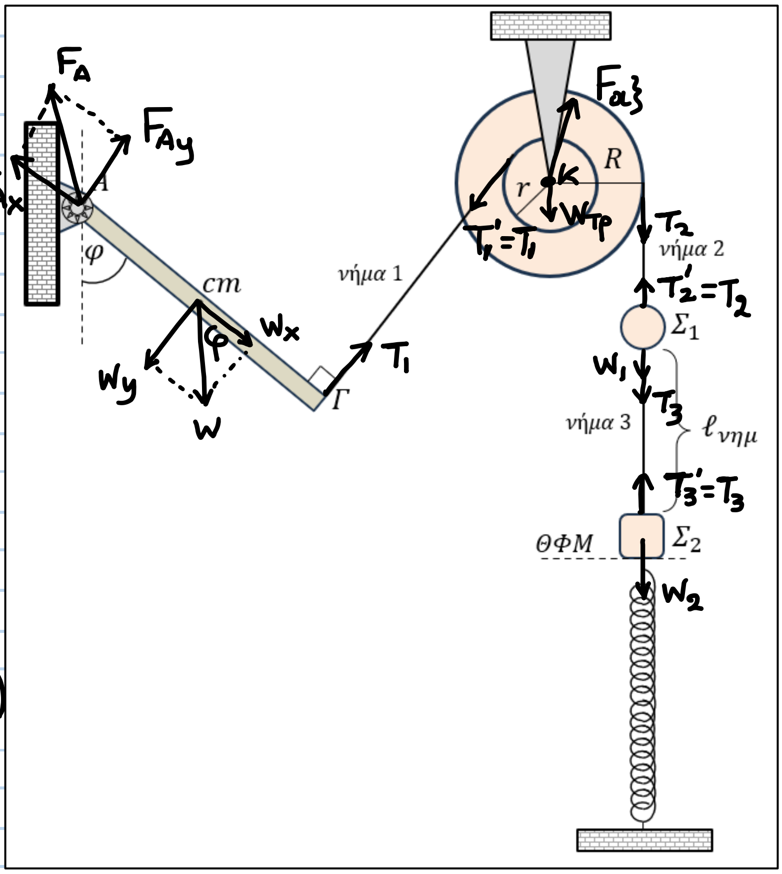
$$\Rightarrow P = 3 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-25} kg\, m/s \Rightarrow \boxed{P = 9{,}6 \cdot 10^{-25} kg\, m/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

$r = 0{,}1m$, $R = 0{,}2m = 2r$

$m_2 = 2kg$ $K = 200N/m$

$m_1 = 1kg$



Δ1 Στη δοκό ασκούνται το βάρος της $\vec{W}$, η τάση $\vec{T_1}$ και η δύναμη $\vec{F_A}$ από την άρθρωση. Στην τροχαλία ασκούνται οι τάσεις $\vec{T_1'}$ ($T_1'=T_1$) και $\vec{T_2}$ ($T_2=T_2'$) από τα νήματα, το βάρος της και η δύναμη από τον άξονά της. Στο σώμα Σ_1 ασκούνται το βάρος του $\vec{W_1}$, η τάση $\vec{T_2'}$ και η τάση $\vec{T_3}$ ($T_3=T_3'$). Στο σώμα Σ_2 ασκούνται η τάση $\vec{T_3}$ και το βάρος του $\vec{W_2}$ ($F_{\varepsilon\lambda}=0$ ΘΦΜ).

Από την ισορροπία όλων των σωμάτων έχουμε:

α) Για Σ_2 : $\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow T_3' = W_2 = m_2 g = 20N$

Για Σ_1 : $\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow T_2' = W_1 + T_3 = 10N + 20N = 30N$.

Για τροχαλία : $\Sigma \tau_K = 0 \Rightarrow \tau_{T_1'} - \tau_{T_2} = 0 \Rightarrow T_1' \cdot r = T_2 R$

$\Rightarrow T_1' = 2T_2 = 60N$

Για δοκό: $\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_{T_1} - \tau_W = 0 \Rightarrow T_1 \ell = W \frac{\ell}{2} \eta\mu\varphi$

$\Rightarrow W = \frac{2T_1}{\eta\mu\varphi} = \frac{2 \cdot 60}{0{,}6} N \Rightarrow \boxed{W = 200N}$

β) Επίσης $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = W_x = W \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 200 \cdot 0{,}8N = 160N$

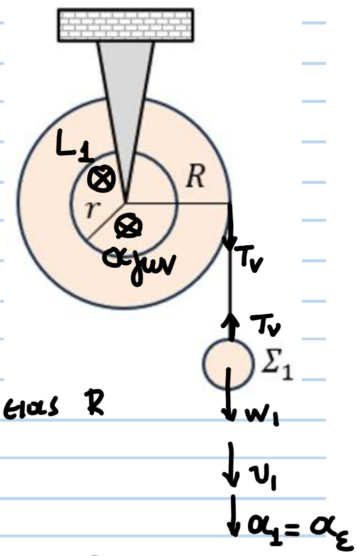
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + T_1 - W_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} = W \cdot \eta\mu\varphi - T_1$

$\Rightarrow F_{Ay} = 200 \cdot 0{,}6N - 60N \Rightarrow F_{Ay} = 60N$

$\vec{F_A} = \vec{F_{Ax}} + \vec{F_{Ay}} \xrightarrow{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o} F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \Rightarrow \boxed{F_A = \sqrt{29200}\ N}$

Δ2 Δίνεται $\alpha_{γων} = 10\,rad/s^2$

Για το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας ακτίνας R της τροχαλίας ισχύει $\alpha_ε = R\alpha_{γων} = 2\,m/s^2$



Το σώμα Σ_1 κάθε στιγμή έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας με αυτή των σημείων της περιφέρειας R απ' όπου ξετυλίγεται το νήμα.

Άρα $υ_1 = υ_{περ_R} = R\omega \rightarrow \frac{dυ_1}{dt} = \frac{dυ_{περ_R}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_ε = R\alpha_{γων}$

α) Για τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ισχύει: $\frac{dL_{συστ}}{dt} = \Sigma\tau_{εξωτ} = \tau_{w_1} = w_1 R = m_1 g R \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{συστ}}{dt} = 2\,\frac{kg\,m^2/s}{s}} \otimes$

β) Για τη στροφορμή του Σ_1 ισχύει: $L_1 = m_1 υ_1 R$

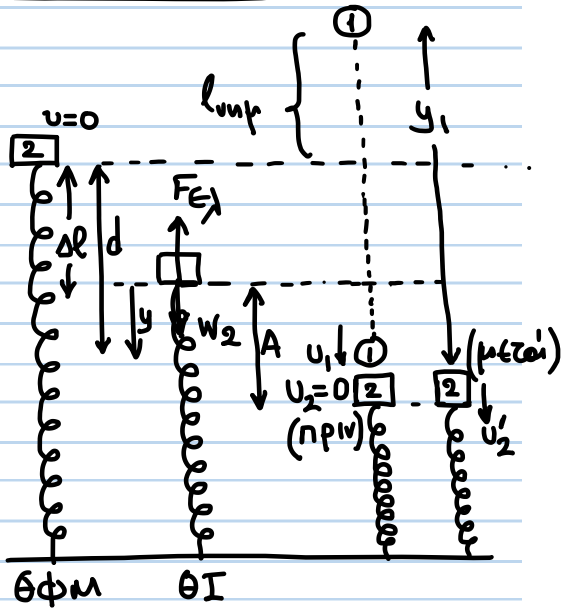
όπου $υ_1 = \alpha_1 \cdot t_1 = 2 \cdot 0{,}5\,m/s \Rightarrow υ_1 = 1\,m/s$

Άρα $L_1 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}2\,kg\,m^2/s \Rightarrow \boxed{L_1 = 0{,}2\,kg\,m^2/s} \otimes$

Δ3 Το σώμα Σ_2 ξεκινά να εκτελεί ΑΑΤ από την άνω ακραία θέση $+A$ (ΘΦΜ) γύρω από τη ΘΙ με πλάτος $A = \Delta\ell$

Ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_2 \Rightarrow k\Delta\ell = m_2 g$

$\Rightarrow \Delta\ell = \frac{m_2 g}{k} = 0{,}1\,m \rightarrow \underline{A = \Delta\ell = 0{,}1\,m}$



Όταν το Σ_2 έχει διανύσει απόσταση d απέχει από τη ΘΙ $|y| = d - \Delta\ell = 0{,}05\,m$

Ισχύει $\underset{(D=k)}{E = K + U} \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_2 υ^2 + \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow υ^2 = \frac{k}{m_2}(A^2 - y^2)$

$\Rightarrow υ = \pm\sqrt{\frac{k}{m_2}}\sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow{υ<0} υ = -\sqrt{\frac{k}{m_2}}\sqrt{A^2 - y^2} \Rightarrow \boxed{υ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,m/s}$

Δ4 Η στιγμή της κρούσης είναι η $t_2 = 5\frac{T}{2}$ ($5^{η}$ φορά που $K=0$ αφού κοπεί το νήμα) όπου $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = \frac{\pi}{5}$ sec

άρα $t_2 = \frac{\pi}{2}$ sec.

α) Μέχρι τότε το $Σ_1$ έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση y_1 για την οποία ισχύουν:

$$y_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_2^2 = \frac{1}{2}2\frac{\pi^2}{4}\,m = \frac{10}{4}\,m \Rightarrow y_1 = 2{,}5m$$

και $y_1 = \ell_{νημ} + \Delta\ell + A = \ell_{νημ} + 2\Delta\ell \Rightarrow \ell_{νημ} = y_1 - 2\Delta\ell \Rightarrow \boxed{\ell_{νημ} = 2{,}3m}$

β) Για τη ταχύτητα του $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση ισχύει:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \qquad \text{όπου} \quad \upsilon_1 = \alpha_1 t_2 = 2\frac{\pi}{2}\,m/s = \pi\,m/s.$$

$$\upsilon_2' = \frac{2\cdot 1}{3}\pi\,m/s \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\pi}{3}\,m/s.$$

Το $Σ_2$ μετά την κρούση εκτελεί νέα ααΤ με πλάτος A'.

Ισχύει $E' = K_2' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + \frac{1}{2}k\cdot A^2$

$$\Rightarrow A'^2 = \frac{m_2}{k}\upsilon_2'^2 + A^2 = \left(\frac{2}{200}\frac{4\pi^2}{9} + \frac{1}{100}\right)m^2 = \left(\frac{4\cdot 10}{900} + \frac{1}{100}\right)m^2 = \left(\frac{40+9}{900}\right)m^2$$

$$\Rightarrow A' = \sqrt{\frac{49}{900}}\,m \quad \Rightarrow \boxed{A' = \frac{7}{30}\,m}$$