Διαγώνισμα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

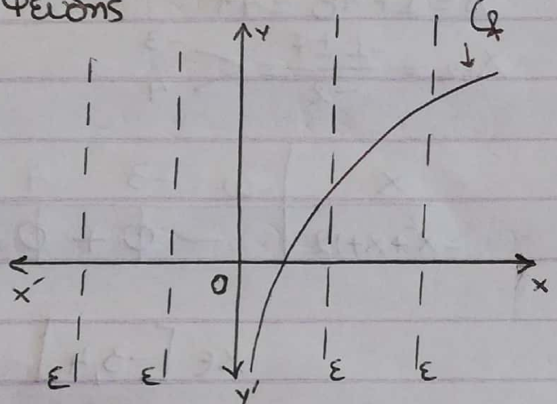
(Λύσεις)

Θέμα Α

(A1) Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 146

(A2) Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 125

(A3) Ψευδής



Η ε τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.

(A4)

i) Λ

ii) Λ

iii) Σ

iv) Λ

v) Λ

Θέμα Β

i) Πρέπει $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq 1$

Συναληθεύοντας : $\boxed{A_f = [0,1) \cup (1, +\infty)}$

ii) Πρέπει $x^2 + 4|x| + 3 \neq 0$ ισχύει διότι $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $|x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε $\boxed{A_f = \mathbb{R}}$

iii) Πρέπει $x^2+2x+5 \neq 0$ ισχύει διότι
$\Delta = 4-20 = -16 < 0$
οπότε $x^2+2x+5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $\boxed{A_f = \mathbb{R}}$

iv) Πρέπει $x^2+2x-3 \geq 0$ και $-x^2+x+12 \geq 0$

$\Delta = 4+12 = 16$
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = < \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$

$\Delta = 1+48 = 49$
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{-2} = < \begin{matrix} -3 \\ 4 \end{matrix}$

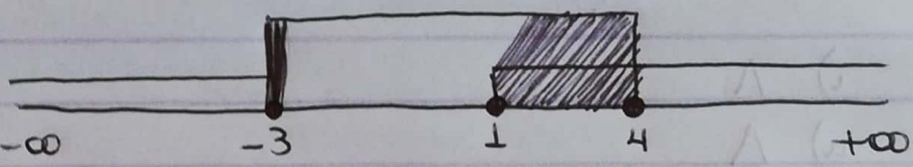
x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		+	0	−	0	+	

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$-x^2+x+12$		−	0	+	0	−	

$x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

$x \in [-3, 4]$

Συναληθεύοντας:



$\boxed{A_f = \{-3\} \cup [1, 4]}$

v) Αφού $x < -2$, $-2 < x < 1$, $1 \leq x$ τότε

$\boxed{A_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)}$

Θέμα Γ

Γ1) $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$

$\Delta = 4\beta^2 - 4(\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16$

$x_{1,2} = \frac{2\beta \pm 4}{2} = < \begin{matrix} \beta+2 \\ \beta-2 \end{matrix}$ οπότε $\boxed{x_1 = \beta - 2}$ και $\boxed{x_2 = \beta + 2}$

Γ2 $f(0) = \beta^2 - 4$

$f(1) = 1 - 2\beta + \beta^2 - 4 = \beta^2 - 2\beta - 3$

$f(2) = 4 - 4\beta + \beta^2 - 4 = \beta^2 - 4\beta$

Για να είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου πρέπει:

$$f(1) = \frac{f(0)+f(2)}{2} \Leftrightarrow \beta^2 - 2\beta - 3 = \frac{\beta^2 - 4 + \beta^2 - 4\beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2\beta^2} - \cancel{4\beta} - 6 = \cancel{2\beta^2} - \cancel{4\beta} - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6 = -4$$

Άτοπο!!!

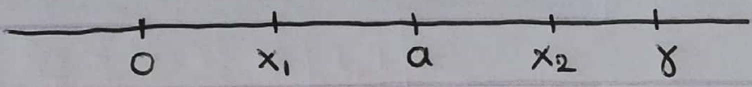
Οπότε <u>δεν είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου</u>

Γ3

x	0		x_1		α		x_2		γ
$f(x)$		$+$	0	$-$		0	$+$		

Αφού $\beta > 2 \Leftrightarrow \beta - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > 0$ οπότε κ $x_2 > x_1 > 0$

Έτσι ισχύει η διάταξη:



$$0 < x_1 < \alpha < x_2 < \gamma$$

οπότε από τον πίνακα προσήμου ισχύει $f(0) > 0$

$f(\alpha) < 0$

$f(\gamma) > 0$

κ αφού $\alpha > 0$ κ $\gamma > 0$ τότε:

$$\boxed{\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \gamma \cdot f(\gamma) \cdot f(0) < 0}$$

(Γ4) $M \in C_f \Leftrightarrow f(3) = -4$

$\Leftrightarrow 9 - 6\beta + \beta^2 - 4 = -4$

$\Leftrightarrow \beta^2 - 6\beta + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (\beta - 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \beta - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\beta = 3}$

(Γ5) Αφου $\beta = 3$ τότε $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Πρεπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 > 0$

$\Delta = 36 - 20 = 16$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} = <^{5}_{1}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
x^2-6x+5		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

$\boxed{x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)}$

Θέμα Δ

(Δ1) Αφού $M \in C_f$ τοτε $f(x) = y$ αρα $y = \frac{16}{x}$ οποτε $M\left(x, \frac{16}{x}\right)$

Έτσι $(OA) = \frac{16}{x}$ και $(OB) = x$, άρα

$E = (OA) \cdot (OB) = \frac{16}{x} \cdot x = 16$ τετραγωνικές μονάδες

και $\Pi = 2(OA) + 2(OB) = 2 \cdot \frac{16}{x} + 2x = 2x + \frac{32}{x}$ μονάδες

(Δ2) $\Pi = 20 \Leftrightarrow 2x + \frac{32}{x} = 20 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Delta = 100 - 64 = 36$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

Για $x = 8$, $y = \frac{16}{8} = 2$

Για $x = 2$, $y = \frac{16}{2} = 8$

Οπότε $\boxed{M(8,2)}$ ή $\boxed{M(2,8)}$

Δ3 i) Πρέπει $(OA) = (OB)$

$\Leftrightarrow \frac{16}{x} = x$

$\Leftrightarrow x^2 = 16$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 4}$ ή $x = -4$

Απορρίπτεται διότι $x > 0$

ii) Πρέπει $\Pi(x) \geq \Pi(4)$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{32}{x} \geq 2 \cdot 4 + \frac{32}{4}$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{32}{x} \geq 16$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2 + 32 \geq 16x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 32 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 0$

ισχύει για κάθε $x > 0$