15/01/2023

Προσομοιωτικό Διαγώνισμα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

A1) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 90

A2) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 70

A3) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 63

A4)
α) Σ
β) Σ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Λ

Θέμα Β

B1) α) $2x^2-x-6=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6)=1+48=49$

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot2}=\frac{1\pm7}{4}=\begin{cases}2\\-\frac{3}{2}\end{cases}$

β) $|x-1|<2$

$\iff -2<x-1<2$

$\iff -2+1<x-1+1<2+1$

$\iff -1<x<3$

γ) Αφου $-1<x<3$ και $x=2$ ή $x=-\frac{3}{2}$, οι σχέσεις (1) και (2) ικανοποιούνται ταυτόχρονα για $x=2$

B2) ι) Αφού $\alpha>\beta$ τοτε $\alpha-\beta>0$ οπότε $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$

Αφού $\alpha>1$ τοτε $1-\alpha<0$ οπότε $|1-\alpha|=-(1-\alpha)$

Άρα $\frac{a-b}{|a-b|} - \frac{|1-a|}{1-a} = \frac{a-b}{a-b} - \frac{-(1-a)}{1-a} =$

$= 1-(-1) =$

$= 1+1 =$

$= 2$

ii) Αφού $a>1$ ① κ $b>1$ ② τότε από ①+② $\Rightarrow a+b>1+1$

$\Rightarrow a+b>2$

$a+b > \frac{a-b}{|a-b|} - \frac{|1-a|}{1-a}$

$\Leftrightarrow a+b>2$ ισχύει

Θέμα Γ

Γ1 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} =$

$= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}^2+\sqrt{5}^2-\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} =$

$= \frac{3+5}{5-3} =$

$= \frac{8}{2} =$

$= 4$

Γ2 i) $x^4-7x^2-8=0 \Leftrightarrow (x^2)^2-7x^2-8=0$

Θέτω $\omega=x^2$ οπότε $\omega^2-7\omega-8=0$

$\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot(-8)=49+32=81$

$\omega_{1,2}=\frac{7\pm9}{2}=\begin{cases}8\\-1\end{cases}$

Άρα $x^2=8$ ή $x^2=-1$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{8}$ ή $x=-\sqrt{8}$ Αδύνατη

$\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$ ή $x=-2\sqrt{2}$

ii) $x^2-8|x|+12=0 \Leftrightarrow |x|^2-8|x|+12=0$

Θέτω $\omega=|x|$ οπότε $\omega^2-8\omega+12=0$

$\Delta=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12=64-48=16$

$\omega_{1,2}=\frac{8\pm 4}{2}=\begin{cases}6\\2\end{cases}$

Άρα $|x|=6$ ή $|x|=2$

$\Leftrightarrow x=6$ ή $x=-6$ ή $x=2$ ή $x=-2$

iii) Πρέπει $x\neq 0$ και $x^2+x\neq 0$ και $x+1\neq 0$

$\Leftrightarrow x(x+1)\neq 0$ $\quad\Leftrightarrow x\neq -1$

$\Leftrightarrow x\neq 0$ και $x+1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq -1$

Άρα $x\neq 0$ και $x\neq -1$

$\frac{1}{x}+\frac{x^2+1}{x^2+x}+\frac{x+3}{x+1}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+1)\cdot\frac{1}{x}+x(x+1)\cdot\frac{x^2+1}{x(x+1)}+x(x+1)\frac{x+3}{x+1}=x\cdot(x+1)\cdot 0$

$\Leftrightarrow x+1+x^2+1+x(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x+1+x^2+1+x^2+3x=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ Απορρίπτεται

Η εξίσωση είναι Αδύνατη

iv) Αφού $|x|\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $|x|-x\geq 0$

Έτσι $||x|-x|=|x|-x$

Επιπλέον πρέπει $4-3|x|\geq 0 \Leftrightarrow |x|\leq\frac{4}{3}\Leftrightarrow -\frac{4}{3}\leq x\leq\frac{4}{3}$

$||x|-x|=4-3|x| \Leftrightarrow |x|-x=4-3|x|$

$\Leftrightarrow 4|x|=4+x$

Πρέπει $4+x \geq 0 \iff x \geq -4$

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς: $x \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$

Οπότε $4x = 4+x$ ή $4x = -4-x$

$\iff 3x = 4$ $\iff 5x = -4$

$\iff x = \frac{4}{3}$ $\iff x = -\frac{4}{5}$

δεκτή δεκτή

Θέμα Δ

Δ1 i) Αφού $\Delta = [-4(\lambda+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8\lambda - 1) =$

$= 16\lambda^2 + 32\lambda + 16 - 32\lambda + 4 =$

$= 16\lambda^2 + 20 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

τότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

ii) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 4(\lambda+1)$

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 8\lambda - 1$

$A = (x_1 - 2)\cdot(x_2 - 2) = x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 =$

$= x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 =$

$= 8\lambda - 1 - 2[4(\lambda+1)] + 4 =$

$= 8\lambda - 1 - 8\lambda - 8 + 4 =$

$= -5$ ανεξάρτητη του λ

Δ2 $S = \rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 2$

$P = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -4$

i) Αφού $\rho_1 + \rho_2 = 2$ τότε $(\rho_1 + \rho_2)^2 = 2^2$

$\iff \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2 = 4$

$\iff \rho_1^2 - 8 + \rho_2^2 = 4$

$\iff \rho_1^2 + \rho_2^2 = 12$

ii) $\rho_1^3 + \rho_2^3 = (\rho_1 + \rho_2)(\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2) = 2 \cdot (12 + 4) = 32$

iii) $(\rho_1-\rho_2)^2=\rho_1^2-2\rho_1\rho_2+\rho_2^2=12+8=20$

iv) $\dfrac{\rho_1^2+2}{\rho_2}+\dfrac{\rho_2^2+2}{\rho_1}=\dfrac{\rho_1^3+2\rho_1+\rho_2^3+2\rho_2}{\rho_1\cdot\rho_2}=$

$$=\frac{\rho_1^3+\rho_2^3+2(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\cdot\rho_2}=$$

$$=\frac{32+4}{-4}=$$

$$=-9$$

Δ3) Αφού $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \beta=-\alpha-\gamma$

Οπότε $\beta^2=(-\alpha-\gamma)^2$

$\Rightarrow \beta^2=\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=$

$=\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2-4\alpha\gamma=$

$=\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2=$

$=(\alpha-\gamma)^2>0$ εφόσον $\alpha\neq\gamma$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές κ' άνισες.