03/01/2025

Διαγώνισμα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

Θέμα Α

A1 Σχολικό, σελίδα 70

A2 Σχολικό, σελίδα 71

A3
i) Αδύνατη
ii) $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
iii) $|\alpha|$ ή $-\alpha$
iv) $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

A4
1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Σ

Θέμα Β

B1 i) $A = \sqrt{80+\sqrt{4-\sqrt{9}}} = \sqrt{80+\sqrt{4-3}} =$
$= \sqrt{80+\sqrt{1}} = \sqrt{80+1} = \sqrt{81} =$
$= 9$

ii) $B = (3+\sqrt{27}-\sqrt{12})(\sqrt[3]{27}-\sqrt{48}+3\sqrt{3}) =$
$= (3+3\sqrt{3}-2\sqrt{3})\cdot(3-4\sqrt{3}+3\sqrt{3}) =$
$= (3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) =$
$= 3^2-\sqrt{3}^2 = 9-3 = 6$

iii) $\Gamma = \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} =$

$= |1-\sqrt{5}| - |1+\sqrt{5}| =$

$= \sqrt{5} - 1 - (1+\sqrt{5})$

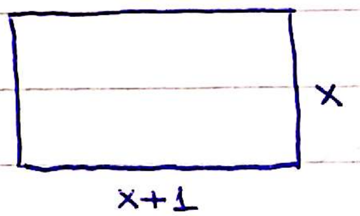
$= \sqrt{5} - 1 - 1 - \sqrt{5}$

$= -2$

διότι $1 < \sqrt{5}$

άρα $1 - \sqrt{5} < 0$

B2



i) $\Pi = 2\cdot(x+1) + 2x = 2x + 2 + 2x =$

$= 4x + 2$

$E = x\cdot(x+1) = x^2 + x$

ii) $E = 90 \Leftrightarrow x^2 + x = 90 \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90) = 1 + 360 = 361$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} =$

$= \begin{cases} 9 \\ -10 \end{cases}$ απορρίπτεται

Άρα οι διαστάσεις είναι $x = 9$ μέτρα κ'

$x + 1 = 10$ μέτρα

Θέμα Γ

Γ1) i) $|x-4| = 3-x$

Πρέπει $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

Άρα $x-4 = 3-x$ ή $x-4 = -3+x$

$\Leftrightarrow 2x = 7$ $\qquad \Leftrightarrow -4 = -3$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ Απορρίπτεται $\qquad$ Αδύνατη

διότι $x \leq 3$

Άρα η εξίσωση είναι Αδύνατη

ii) Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

και $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -1$

και $-x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Η εξίσωση γίνεται

$$\frac{4x-3}{x-1} - \frac{2x^2-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x+1}{x+1} = 0$$

ΕΚΠ$\left(x-1, (x-1)(x+1), x+1\right) = (x-1)(x+1)$

$$\cancel{(x-1)}(x+1)\frac{4x-3}{\cancel{x-1}} - \cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}\frac{2x^2-1}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} - (x-1)\cancel{(x+1)}\frac{2x+1}{\cancel{x+1}} = 0$$

$\Leftrightarrow (x+1)(4x-3) - (2x^2-1) - (x-1)(2x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{4x^2} - 3x + 4x - 3 \cancel{-2x^2} + 1 \cancel{-2x^2} - x + 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

iii) $\frac{2-|x-2|}{3} - \frac{1-|4-2x|}{2} = |2-x| - \frac{8-|2-x|}{6}$

$\Leftrightarrow 2\cdot(2-|x-2|) - 3(1-|4-2x|) = 6|2-x| - (8-|2-x|)$

$\Leftrightarrow 4-2|x-2| - 3 + 3\cdot 2\cdot |2-x| = 6|2-x| - 8 + |2-x|$

$\Leftrightarrow 4-2|x-2| - 3 + 6\cancel{|x-2|} = 6\cancel{|x-2|} - 8 + |x-2|$

$\Leftrightarrow 3|x-2| = 9$

$\Leftrightarrow |x-2| = 3$

$\Leftrightarrow x-2 = 3$ ή $x-2 = -3$

$\Leftrightarrow x=5$ ή $x=-1$

iv) Πρέπει $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2+10x-12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25-24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \text{ Απορρίπτεται} \end{cases}$

Άρα $x=3$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Γ2 $\lambda^2(x+4)-5\lambda(x+\lambda)=-25$

$\Leftrightarrow \lambda^2x+4\lambda^2-5\lambda x-5\lambda^2=-25$

$\Leftrightarrow (\lambda^2-5\lambda)x=\lambda^2-25$

• Αν $\lambda^2-5\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-5)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ κ' $\lambda-5\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 5$

τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x=\frac{\lambda^2-25}{\lambda^2-5\lambda}=\frac{(\lambda-5)(\lambda+5)}{\lambda(\lambda-5)}=\frac{\lambda+5}{\lambda}$$

• Αν $\lambda^2-5\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=5$, τότε:

i) Αν $\lambda=0$, η εξίσωση γίνεται:

$0x=-25$

Αδύνατη

ii) Αν $\lambda=5$, η εξίσωση γίνεται:

$0x=0$

Ταυτότητα

Θέμα Δ

Δ1 $\lambda^2(\lambda x-1)+x-2\lambda=1-3\lambda x(\lambda+1)$

$\Leftrightarrow \lambda^3x-\lambda^2+x-2\lambda=1-3\lambda^2x-3\lambda x$

$\Leftrightarrow (\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)x=\lambda^2+2\lambda+1$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)^3\cdot x=(\lambda+1)^2$

Για να είναι αόριστη πρέπει $(\lambda+1)^3=0$ κ' $(\lambda+1)^2=0$

οπότε $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$

Η εξίσωση γίνεται:

$$|(w+3)^{-1+2}|=2024$$

$$\Leftrightarrow |w+3|=2024$$

$$\Leftrightarrow w+3=2024 \quad \text{ή} \quad w+3=-2024$$

$$\Leftrightarrow w=2021 \quad \text{ή} \quad w=-2027$$

(Δ2) i) $a=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=$

$$=(2^2)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}}=$$

$$=2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{2^{\frac{4}{3}}}}=$$

$$=2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{2^{\frac{4}{6}}}=$$

$$=2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{12}}=$$

$$=2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=$$

$$=2^1=2$$

$$b=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}-1}-6=$$

$$=\frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}-\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$-6=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+5}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}+\frac{7-\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}+\frac{3\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}^2-1}$$

$$-6 = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+5}{2} + \frac{7-\sqrt{5}\sqrt{7}}{2} + \sqrt{3} - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} - 6$$

$$= \cancel{6} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}} - 1 - \cancel{6} =$$
$$= -1$$

ii) $(x+3)^5 - 16x - 48 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)^5 - 16(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)\cdot\left[(x+3)^4 - 16\right] = 0$

$\Leftrightarrow x+3 = 0$ ή $(x+3)^4 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ $\Leftrightarrow (x+3)^4 = 16$

$\Leftrightarrow x+3 = \sqrt[4]{16}$ ή $x+3 = -\sqrt[4]{16}$

$\Leftrightarrow x+3 = 2$ ή $x+3 = -2$

$\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = -5$

iii) $x \in (-1,0)$ άρα $-1 < x < 0$

δηλαδή $0 < x+1 < 1$ άρα $|x+1| = x+1$

$-3 < x-2 < -2$ άρα $|x-2| = -x+2$

$x < 0$ άρα $|x| = -x$

$-3 < 2x-1 < -1$ άρα $|2x-1| = -2x+1$

Άρα $A = x+1 - 2(-x+2) + 3(-x) - (-2x+1) =$

$= x+1+2x-4-3x+2x-1 =$

$= 2x-4$

Όμως $-1 < x < 0 \Leftrightarrow -2 < 2x < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6 < 2x-4 < -4$ κι' αφού $A \in \mathbb{Z}$, τότε $A = -5$

Δ3 Αφού $x^2+y^2=1$, τότε $y^2=1-x^2$

κ' $x^2=1-y^2$

Άρα $K=\sqrt{(1-y^2)^2+4y^2}+\sqrt{(1-x^2)^2+4x^2}=$

$=\sqrt{1-2y^2+y^4+4y^2}+\sqrt{1-2x^2+x^4+4x^2}=$

$=\sqrt{y^4+2y^2+1}+\sqrt{x^4+2x^2+1}=$

$=\sqrt{(y^2+1)^2}+\sqrt{(x^2+1)^2}=$

$=|y^2+1|+|x^2+1|=$

$=y^2+1+x^2+1=$

$=x^2+y^2+2=$

$=1+2=$

$=3$

αφου $x^2+1>0$ κ' $y^2+1>0$ για καθε $x,y\in\mathbb{R}$