12/05/2024

Διαγώνισμα Άλγεβρας Α' Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

A1) Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 146
A2) Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 70
A3) Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 63
A4) i) Λ
ii) Σ
iii) Λ
iv) Λ
v) Σ

Θέμα Β

B1) i) Αφού $a>b$ τότε $a-b>0$ άρα $|a-b|=a-b$
Αφού $a>1$ τότε $1-a<0$ άρα $|1-a|=a-1=-(1-a)$

$$\frac{a-b}{|a-b|}-\frac{|1-a|}{1-a}=\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-b}}-\frac{-\cancel{(1-a)}}{\cancel{1-a}}=1+1=2$$

ii) Αφού $a>1$ κ $b>1$ τότε $a+b>2$
οπότε $a+b>\frac{a-b}{|a-b|}-\frac{|1-a|}{1-a}$

B2) i) Πρέπει $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ κ $x^4\geq 0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Οπότε $x\in(-\infty,1]$
ii) Για $x=-3$: $A=\sqrt{1-(-3)}-\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt{4}-|-3|=$
$=2-3=$
$=-1$

Οπότε $A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0$

Θέμα Γ

Γ1 α) $|2x-5| \leq 3$

$\Leftrightarrow -3 \leq 2x-5 \leq 3$

$\Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$

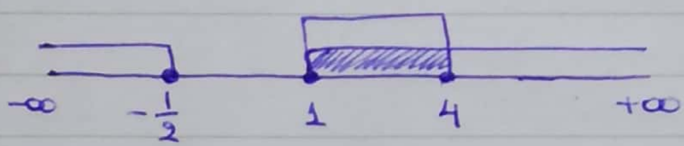
$2x^2 - x - 1 \geq 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$

β) 

Οι κοινές τους λύσεις είναι για $x \in [1, 4]$

Γ2 i) $A_f = (-\infty, 10)$

ii) $f(-1) = 2(-1) - 5 = -7$

$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

$f(5) = 5^2 = 25$

iii) Για να διέρχεται πρέπει $f(0) = 0$

Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$

Άρα δε διέρχεται η C_f από το $O(0,0)$

iv) Πρέπει $y = 21$

Άρα $f_1(x) = 21 \Rightarrow 2x - 5 = 21 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13$ Απορρίπτεται διότι $x \leq 3$

$f_2(x) = 21 \Leftrightarrow x^2 = 21 \Leftrightarrow x = \sqrt{21}$ ή $x = -\sqrt{21}$ Απορρίπτεται διότι $x \in (3, 10)$

Όμως $\sqrt{21} \in (3, 10)$ αφού $3 < \sqrt{21} < 10$

$\Leftrightarrow 9 < 21 < 100$ ισχύει

Οπότε το σημείο της C_f με τεταγμένη $y = 21$ είναι το $K(\sqrt{21}, 21)$

Θέμα Δ

Δ1 α) $x^2+2x+3=\lambda$

$\Leftrightarrow x^2+2x+3-\lambda=0$

Για να έχει δύο ρίζες πραγματικές κ' άνισες πρέπει $\Delta>0$

$\Leftrightarrow 4-4(3-\lambda)>0$

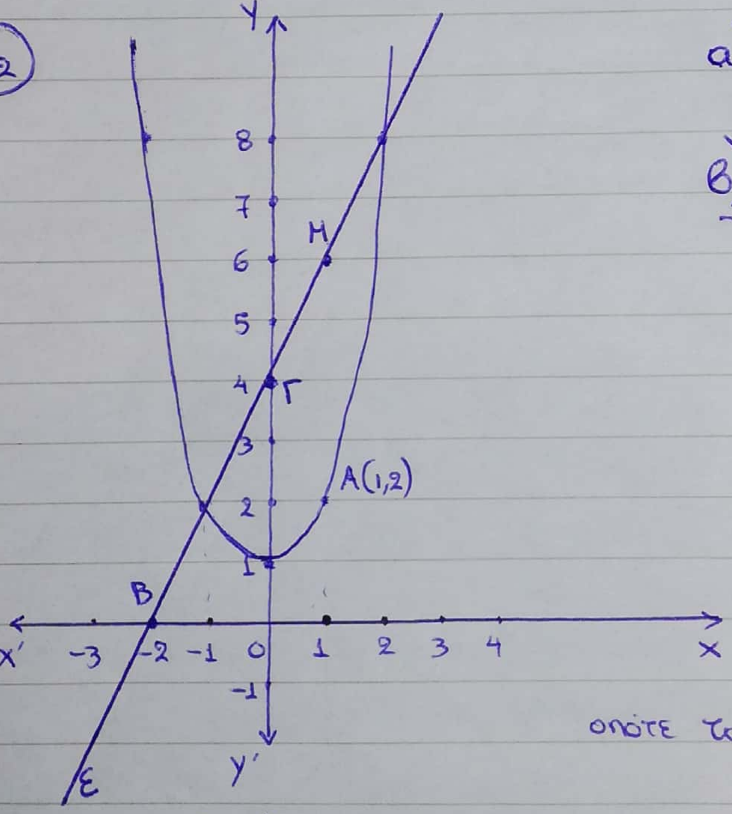
$\Leftrightarrow 4\lambda-12+4>0$

$\Leftrightarrow \lambda>2$

β) Πρέπει $\Delta=0 \Rightarrow \lambda=2$

Για $\lambda=2$ η εξίσωση γίνεται: $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$

Δ2



α) Πρέπει $f(1)=2 \Leftrightarrow a\cdot 1^2=2$

$\Leftrightarrow a=2$

β) i) Έστω $\varepsilon: y=2x+\beta$ η ευθεία

Τότε αφού $M\in\varepsilon$:

$6=2\cdot1+\beta \Rightarrow \beta=4$

Άρα $\varepsilon: y=2x+4$

ii) Με τον $x'x$: Πρέπει $y=0$

άρα $2x+4=0 \Rightarrow x=-2$

οπότε το $B(-2,0)$ σημείο τομής της ε με τον $x'x$

Με τον $y'y$: Πρέπει $x=0$ άρα $y=4$

οπότε το $\Gamma(0,4)$ σημείο τομής της ε με τον $y'y$

γ) i) $x\in(-1,2)$

ii) Πρέπει $f(x)<y \Leftrightarrow 2x^2<2x+4 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x-2<0$

$\Delta=1+8=9$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm3}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Άρα $x\in(-1,2)$