07/05/2023

Καταταχτήριο Διαγώνισμα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

(A1) Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 132

(A2) Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 90

(A3) α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

Θέμα Β

(B1) $\boxed{A_f = [-2,6]}$

(B2) $\boxed{f(A) = [-3,3]}$

(B3) $\boxed{f(-2)=3}$, $\boxed{f(0)=-1}$, $\boxed{f(2)=3}$, $\boxed{f(4)=0}$, $\boxed{f(6)=-3}$

(B4) Με τον $x'x$: $(-1,0)$, $(1,0)$ κ' $(4,0)$

Με τον yy': $(0,-1)$

(B5) $f^2(x) - 3f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\cdot(f(x)-3) = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$ ή $f(x)=3$

Άρα $\boxed{x=-1}$ ή $\boxed{x=1}$ ή $\boxed{x=4}$

ή $\boxed{x=-2}$ ή $\boxed{x=2}$

(B6) $\boxed{x \in [-2,-1) \cup (1,4)}$

Θέμα Γ

(Γ1) Πρέπει $x^2+3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ και $x+3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -3$

Άρα $\boxed{A_f = (-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,+\infty)}$

$$f(x) = \frac{x^3-9x}{x^2+3x} = \frac{\cancel{x}(x^2-9)}{\cancel{x}(x+3)} = \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = x-3$$

(Γ2) $f(4) = 4-3 = 1$

$f(1) = 1-3 = -2$

$f(5) = 5-3 = 2$

Άρα $$A = \frac{1-(-2)}{2-\sqrt{2}} = \frac{3}{2-\sqrt{2}}$$

Με ρητοποίηση έχουμε: $$A = \frac{3(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{3(2+\sqrt{2})}{2^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3(2+\sqrt{2})}{2}$$

(Γ3) $|f(5)\cdot x-1| = |2-f(4)x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2x-1| = |2-x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1 = 2-x$ ή $2x-1 = x-2$

$\Leftrightarrow 3x = 3$ $\qquad \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=1}$

(Γ4) $|f(x)+5| \geq 4 \Leftrightarrow$

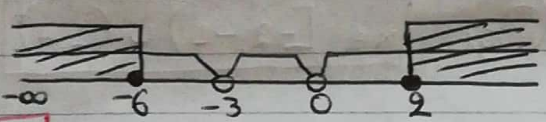
$\Leftrightarrow |x-3+5| \geq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x+2| \geq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2 \geq 4$ ή $x+2 \leq -4$

$\Leftrightarrow x \geq 2$ ή $x \leq -6$

$x \in (-\infty,-6] \cup [2,+\infty)$



Όμως $A_f = (-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,+\infty)$

Συναληθεύοντας: $\boxed{x \in (-\infty,-6] \cup [2,+\infty)}$

Γ5 $f^2(x) + 5f(x) - 6 = 0$

Θέτω $\omega = f(x)$ κ' έχω: $\omega^2 + 5\omega - 6 = 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$\omega_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} 1 \\ -6 \end{cases}$

Άρα $f(x) = 1$ ή $f(x) = -6$

$\Leftrightarrow x - 3 = 1$ ή $\Leftrightarrow x - 3 = -6$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 4}$ $\Leftrightarrow x = -3$

Απορρίπτεται

Θέμα Δ

Δ1 $\Delta = (-3\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2\lambda = 9\lambda^2 - 8\lambda$

$\Delta' = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0 = 64$

$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 8}{18} = \begin{cases} \frac{8}{9} \\ 0 \end{cases}$

λ	$-\infty$		0		$\frac{8}{9}$		$+\infty$
$9\lambda^2 - 8\lambda$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα

$\Delta > 0$	όταν	$\lambda \in (-\infty, 0) \cup (\frac{8}{9}, +\infty)$
$\Delta < 0$	όταν	$\lambda \in (0, \frac{8}{9})$
$\Delta = 0$	όταν	$\lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{8}{9}$

Δ2 α) Πρέπει $\Delta > 0$ άρα $\boxed{\lambda \in (-\infty, 0) \cup (\frac{8}{9}, +\infty)}$

β) Πρέπει $x^2 - 3\lambda x + 2\lambda \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

πρέπει $\Delta \leq 0$ μιας κ' $\alpha = 1 > 0$

Οπότε $\boxed{\lambda \in [0, \frac{8}{9}]}$

Δ3 Για να έχει δύο ρίζες άνισες πρέπει $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (\frac{8}{9}, +\infty)$

Επιπλέον $x_1 + x_2 = x_1 x_2 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = P - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\lambda = 2\lambda - 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

Άρα υπάρχει τιμή του λ ώστε $x_1 + x_2 = x_1 x_2 - 1$

(Δ4) Αν $\lambda = 1$ έχουμε $g(x) = x^2 - 3x + 2$

και $h(x) = \frac{g(x)}{x-1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ άρα $\boxed{A_h = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)}$

$$h(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} \overset{*}{=} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = x-2$$

* Για το x^2-3x+2

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1}$

Άρα $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

Για την Α:

$h(3) = 3 - 2 = 1$

$h(4) = 4 - 2 = 2$

$h(102) = 102 - 2 = 100$

οπότε $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

Αριθμητική Πρόοδος με $\omega = 1$ και $a_1 = 1$ και $a_\nu = 100$

οπότε $a_\nu = 100 \Leftrightarrow a_1 + (\nu - 1)\omega = 100 \Leftrightarrow 1 + \nu - 1 = 100 \Leftrightarrow \nu = 100$

Ζητάμε το $S_{100} = \frac{100}{2} \cdot (a_1 + a_{100}) = 50 \cdot (1 + 100) = 50 + 5000 = 5.050$

Για την Β:

$h(2) = 2 - 2 = 0$, $h(3) = 1$, $h(10) = 10 - 2 = 8$

οπότε $B = 10^0 + 10^1 + \ldots + 10^8 = 1 + 10 + 100 + \ldots + 10^8$

Γεωμετρική Πρόοδος με $\lambda = 10$ και $a_1 = 1$ και $a_\nu = 10^8$

οπότε $a_\nu = 10^8 \Leftrightarrow a_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 10^8 \Leftrightarrow 1 \cdot 10^{\nu-1} = 10^8 \Leftrightarrow \nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9$

Ζητάμε το $S_9 = a_1 \cdot \frac{\lambda^9 - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{10^9 - 1}{10 - 1} = \frac{10^9 - 1}{9}$