Λύσεις διαγωνίσματος Γ΄ λυκείου 4/2/2023

ΘΕΜΑ Α

A1 – α A2 – γ A3 – β A4 – δ A5 ΛΛΛΛΣ

ΘΕΜΑ Β

B1-γ Για συχνότητα f_1 $A'_Σ = 2A$ και $r_1 - r_2 = Nλ_1$ με $N=2$ αφού μεταξύ Μ, Σ υπάρχει άλλο ένα σημείο ενίσχυσης άρα $r_1 - r_2 = 2λ_1$ (1)

Για συχνότητα f_2 $A'_Σ = 0$ και $r_1 - r_2 = (2N'+1)\frac{λ_2}{2}$ με $N' = 2$ αφού μεταξύ Μ, Σ υπάρχουν δυο σημεία ενίσχυσης άρα $r_1 - r_2 = \frac{5λ_2}{2}$ (2)

Όμως (1) = (2) $\Rightarrow 2λ_1 = \frac{5}{2}λ_2 \Rightarrow \frac{υ}{f_1} = \frac{5}{4}\frac{υ}{f_2} \Rightarrow \boxed{\frac{f_1}{f_2} = \frac{4}{5}}$ (γ)

B2-β Όταν $t_1 = 10T$ $A = A_0/2 \Rightarrow A_0 e^{-Λt_1} = \frac{A_0}{2} \Rightarrow e^{-Λt_1} = \frac{1}{2}$

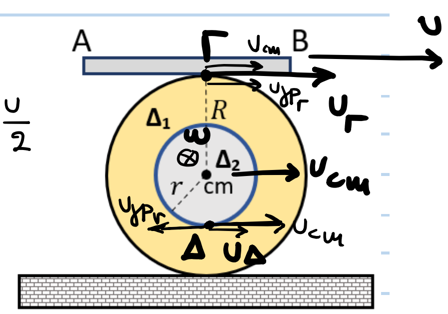
$\Rightarrow Λt_1 = \ln 2 \Rightarrow Λ \cdot 10T = \ln 2 \Rightarrow ΛT = \frac{\ln 2}{10}$

Όταν $t = 50T$ $A = A_0 e^{-Λt}$, $Λt = 50ΛT = 50\frac{\ln 2}{10T}T = 5\ln 2 = \ln 2^5$

άρα $Λt = \ln 32$

Οπότε $A = A_0 e^{-\ln 32} = \frac{A_0}{e^{\ln 32}} = \frac{A_0}{32} \Rightarrow \boxed{A = \frac{A_0}{32}}$ (β)

B3 Α-β, Β-β Α) Ισχύουν $\vec{υ} = \vec{υ}_Γ = \vec{υ}_{cm} + \vec{υ}_{γρ}$



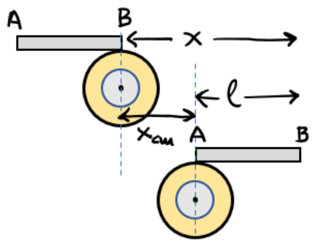
$υ_{cm} = υ_{γρ_R} = Rω$, $υ = υ_Γ = υ_{cm} + υ_{γρ_R} = 2υ_{cm} \Rightarrow υ_{cm} = \frac{υ}{2}$

$\vec{υ}_Δ = \vec{υ}_{cm} + \vec{υ}_{γρ_r} \Rightarrow υ_Δ = υ_{cm} - υ_{γρ_r}$

όπου $υ_{γρ_r} = rω = \frac{Rω}{2} = \frac{υ_{cm}}{2}$

άρα $υ_Δ = υ_{cm} - \frac{υ_{cm}}{2} \Rightarrow υ_Δ = \frac{1}{2}υ_{cm} = \frac{1}{2}\frac{υ}{2} \Rightarrow \boxed{υ_Δ = \frac{υ}{4}}$ (β)

Β) Ισχύει $x - x_{cm} = \ell$, $υ = 2υ_{cm} \rightarrow \frac{dυ}{dt} = 2\frac{dυ_{cm}}{dt} \Rightarrow α = 2α_{cm}$

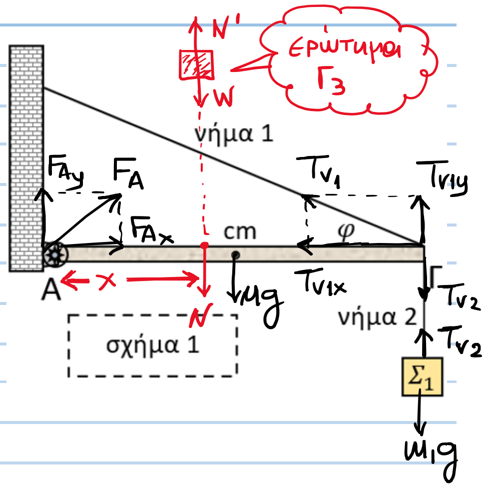


$x = \frac{1}{2}αt^2 = \frac{1}{2}2α_{cm}t^2 = 2\frac{1}{2}α_{cm}t^2 = 2x_{cm}$

Άρα $x - x_{cm} = \ell \Rightarrow 2x_{cm} - x_{cm} = \ell \Rightarrow \underline{\underline{x_{cm} = \ell}}$

Ισχύει $\left.\begin{aligned} υ_{cm} &= α_{cm}t \\ x_{cm} &= \frac{1}{2}α_{cm}t^2 \end{aligned}\right\}$ $x_{cm} = \frac{υ_{cm}^2}{2α_{cm}} \Rightarrow υ_{cm}^2 = 2x_{cm}α_{cm} = 2\ell\frac{α}{2} = \ell α \Rightarrow \boxed{υ_{cm} = \sqrt{\ell α}}$ (β)

ΘΕΜΑ Γ



Γ1 Για Σ_1 : $\Sigma F_{1y} = 0 \Rightarrow T_{\nu 2} = m_1 g = 10N$

Για δοκό : $\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_{T_{\nu 1y}} - \tau_{Mg} - \tau_{T_{\nu 2}} = 0$

$\Rightarrow T_{\nu 1y}\,\ell - Mg\frac{\ell}{2} - T_{\nu 2}\,\ell = 0$

$\Rightarrow 2T_{\nu 1}\cdot ημφ - Mg - 2T_{\nu 2} = 0$

$\Rightarrow Mg = 2T_{\nu 1}\cdot ημφ - 2T_{\nu 2} = 2\cdot 60\frac{1}{2}N - 2\cdot 10N$

$\Rightarrow Mg = 40N \Rightarrow 10M = 40 \Rightarrow \boxed{M = 4\,kg}$

Γ2 Για δοκό : $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = T_{\nu 1x} = T_{\nu 1}\,συνφ = 60\frac{\sqrt{3}}{2}N \Rightarrow F_{Ax} = 30\sqrt{3}\,N$

και $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + T_{\nu 1y} = Mg + T_{\nu 2} \Rightarrow F_{Ay} + 30N = 40N + 10N \Rightarrow F_{Ay} = 20N$

Ισχύει $\vec{F}_A = \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Ay} \longrightarrow$ Μέτρο $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{400+2700}\;N$

$\Rightarrow \boxed{F_A = \sqrt{3100}\;N = 10\sqrt{31}\;N}$

Γ3 $T_{θρ} = 90N \rightarrow T_{θρ_y} = T_{θρ}\,ημφ = 45N$

Η δοκός δέχεται πρόσθετη δύναμη επαφής $\vec{N}$ από το σώμα Σ

που τοποθετείται πάνω της στην οριακή περίπτωση που $T_{\nu 1} = T_{θρ}$

Για το σώμα Σ : $\Sigma F'_y = 0 \Rightarrow N' = mg = 20N$ και κατά μέτρο

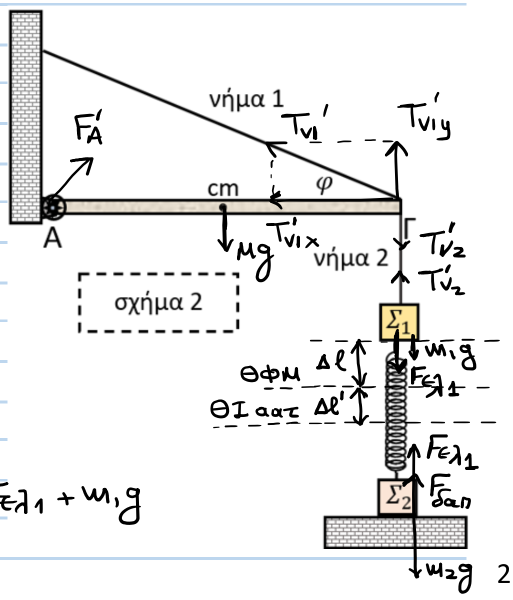
$N' = N = 20N$ (αφού $\vec{N} = -\vec{N'}$)

$\Sigma \tau'_A = 0 \Rightarrow \tau_{T_{θρ_y}} - \tau_{Mg} - \tau_N - \tau_{T_{\nu 2}} = 0$

$\Rightarrow T_{θρ_y}\cdot\ell - Mg\frac{\ell}{2} - N\cdot x - T_{\nu 2}\cdot\ell = 0$

$\Rightarrow 45\cdot 2 - 40 - 20x - 10\cdot 2 = 0 \Rightarrow 20x = 30 \Rightarrow \boxed{x = 1{,}5m}$

Γ4 $F_{δαπ} = 20N$, $T'_{\nu 1} = 80N \rightarrow T'_{\nu 1y} = T'_{\nu 1}\,ημφ = 40N$



Από την ισορροπία της δοκού έχουμε:

$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_{T'_{\nu 1y}} - \tau_{T'_{\nu 2}} - \tau_{Mg} = 0$

$\Rightarrow T'_{\nu 1y}\cdot\ell - T'_{\nu 2}\,\ell - Mg\frac{\ell}{2} = 0$

$\Rightarrow T'_{\nu 2} = T'_{\nu 1y} - \frac{1}{2}Mg = (40-20)\,N$

$\Rightarrow T'_{\nu 2} = 20N$

Για την ισορροπία του Σ_1 : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T'_{\nu 2} = F_{ελ1} + m_1 g$

$\Rightarrow T'_{\nu 2} = F_{\varepsilon\lambda_1} + m_1 g \Rightarrow 20 = F_{\varepsilon\lambda_1} + 10 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda_1} = 10N \Rightarrow k\Delta\ell = 10N$

$100\Delta\ell = 10 \Rightarrow \boxed{\Delta\ell = 0,1m}$

Για την ισορροπία του σώματος Σ_2 ισχύει

$\Sigma F_{2y} = 0 \Rightarrow F_{\delta\alpha\pi} + F_{\varepsilon\lambda_1} = m_2 g \Rightarrow (20+10)N = m_2 g$

$\Rightarrow m_2 g = 30N \Rightarrow 10 m_2 = 30 \Rightarrow \boxed{m_2 = 3kg}$

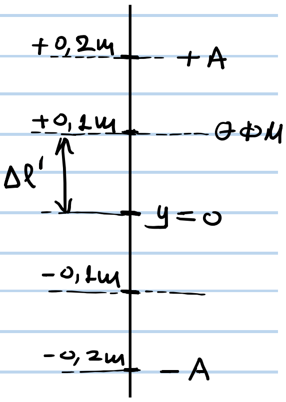
Γ5 ΘΙαατ: $\Sigma F'_{1y} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda_2} = m_1 g \Rightarrow k\Delta\ell' = m_1 g \Rightarrow \Delta\ell' = \frac{m_1 g}{k} = 0,1m$

Πλάτος ααт m_1: $A = \Delta\ell + \Delta\ell' \Rightarrow \underline{A = 0,2m}$

ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{max}^2 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 + \frac{1}{2} k y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{m_1}{k}(v_{max}^2 - \upsilon^2)}$
$(D = k)$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{m_1}{k}\frac{1}{4}v_{max}^2}$ όπου $v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1}}\cdot A$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{m_1}{k}\frac{1}{4}\frac{k}{m_1}A^2} \Rightarrow y = \pm\frac{A}{2} = \pm 0,1 m$



Έστω θετικά του άξονα της ααт προς τα πάνω

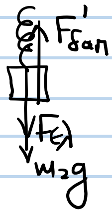
Το Σ_1 ξεκινά ααт από την άνω ακραία θέση $+A$

2^{η} φορά $|\upsilon| = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{max}$ θα έχει στη θέση $y = -0,1m$

Τότε από τη ΘΦΜ απέχει $d = \Delta\ell' + |y| = 0,1m + 0,1m \Rightarrow d = 0,2m$

Άρα το μέτρο της $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ είναι $F_{\varepsilon\lambda} = k\,d = 100\cdot 0,2m \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 20N$
με φορά κάτω

Για Σ_2



$\Sigma F_{2y} = 0 \Rightarrow F'_{\delta\alpha\pi} = F_{\varepsilon\lambda} + m_2 g = 20N + 30N$

$\Rightarrow \boxed{F'_{\delta\alpha\pi} = 50N}$

ΘΕΜΑ Δ

Από γραφική για $x=0$ $\phi = 10\pi\,rad \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = 10\pi \Rightarrow \frac{2\pi\cdot 2}{T} = 10\pi$

$\Rightarrow T = 0,4\,sec \rightarrow f = 1/T = 2,5Hz \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 5\pi\,rad/s$

για $x = 4m$ $\phi = 0 \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow 10\pi = \frac{2\pi\cdot 4}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,8m$

$\upsilon = \lambda f = 2\,m/s$ και $y = 0,5\,\eta\mu(\omega t)$ SI $\rightarrow A = 0,5m$

Δ1 Εξίσωση κύματος: $y = A\,\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow \boxed{y = 0,5\cdot\eta\mu(5\pi t - 2,5\pi x)}$
SI

Φάση κύματος $\phi = 5\pi t - 2,5\pi x$ (SI)

Δ2) Για $x_Σ$ την $t = 2\,sec$ $\quad φ_Σ = 12,5π\,rad$

$\Rightarrow 5π\cdot 2 - 2,5π x_Σ = 12,5π \Rightarrow 2,5π x_Σ = -2,5π \Rightarrow \boxed{x_Σ = -1m}$

Δ3) Για τα σημεία Ο και Μ ισχύει:

$$Δφ = φ_O - φ_M = \frac{2πt}{T} - \left(\frac{2πt}{T} - \frac{2πx_M}{λ}\right) \Rightarrow Δφ = \frac{2πx_M}{λ}$$

$$\Rightarrow Δφ = \frac{2π\cdot 2}{0,8} \Rightarrow Δφ = 5π\ rad \Rightarrow φ_O - φ_M = 5π\,rad$$

Το κύμα φτάνει στο Μ την $t_M = \frac{x_M}{υ} = \frac{2}{2}\,sec \Rightarrow t_M = 1\,sec$

οπότε ισχύει $y_M = 0$, $V_M = +V_{max}$

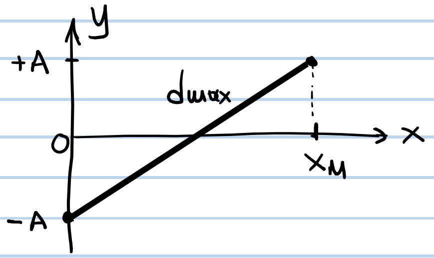
Τότε για Ο $(x=0)$ $\quad y_O = 0,5ημ(5π) = 0 \Rightarrow y_O = 0$

και $V_O = V_{max}συν\left(\frac{2πt}{T} - \frac{2πx}{λ}\right) = V_{max}συν5π = -V_{max} \Rightarrow V_O = -V_{max}$

Άρα για την αρχή Ο την $t = t_M = 1\,sec$ $\quad y_O = 0$, $V_O = -V_{max}$.

Τα δύο σημεία θα έχουν καθε στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις και αντίθετες ταχύτητες [αντίθετου φάσης $\rightarrow Δφ = 5π = 4π + π$]

Άρα 1η φορά θα απέχουν τη μέγιστη απόσταση d_{max} όταν μετά τη χρονική στιγμή $t_M = 1\,sec$ βρεθούν στις ακραίες θέσεις τους, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_M + T/4 \Rightarrow \boxed{t = 1,1\,sec}$



Ισχύει $d_{max}^2 = x_M^2 + (2A)^2$

$d_{max} = \sqrt{x_M^2 + (2A)^2}$

$d_{max} = \sqrt{4+1}\ m \Rightarrow \boxed{d_{max} = \sqrt{5}\ m}$

Δ4) $y = y_1 + y_2 = Aημ\left(\frac{2πt}{T} - \frac{2πx}{λ}\right) + Aημ\left(\frac{2πt}{T} + \frac{2πx}{λ}\right)$

$y = 2Aσυν\frac{2πx}{λ}ημ\frac{2πt}{T} \Rightarrow \boxed{y = 1συν(2,5πx)\cdot ημ(5πt)\ \ SI}$

Θέσεις δεσμών: $x = (2k+1)\frac{λ}{4} = (2k+1)0,2$

$\Rightarrow x = 0,4k + 0,2 \quad x \rightarrow$ σε m

Για $-0,6m \le x \le +0,6m \quad k=0\ \ x = +0,2m\ ,\ k=1\ \ x = +0,6m$

$k=-1\ \ x = -0,2m \quad k=-2\ \ x = -0,6m$

Θέσεις κοιλιών: $x = kλ/2 \Rightarrow x = 0,4k$ σε m

Για $-0,6m \le x \le +0,6m$ $\quad k=-1 \quad x=-0,4m$

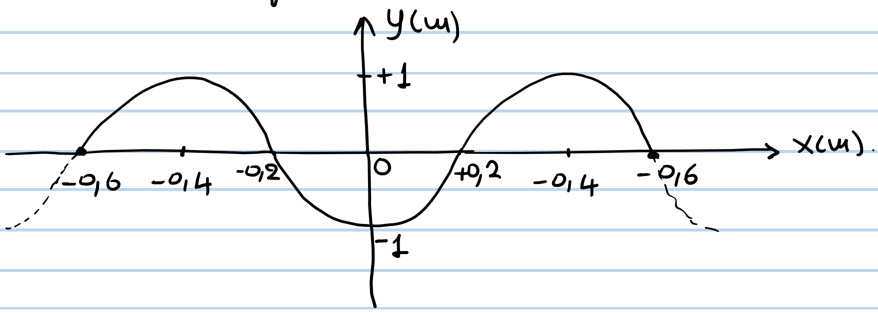
$k=0 \quad x=0$

$k=1 \quad x=+0,4m$

Την $t_0'=0$ για την κοιλία $x=0$ $y=0$, $v>0$, 2η φορά v_{max} θα έχει στη θέση $y=-2A=-1m$ την $t=\frac{3T}{4}=0,3\,sec$

Τότε και οι άλλες δύο κοιλίες στις θέσεις $x=\pm 0,4m$ θα βρίσκονται στις ακραίες θέσεις τους $y=+2A=+1$ αφού έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi=\pi$ με την κοιλία στην αρχή του άξονα

Άρα το στιγμιότυπο θα είναι:



Δ5 Για το πλάτος των σημείων του στάσιμου ισχύει:

$$A'=2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1\cdot|\sigma\upsilon\nu\, 2,5\pi x|$$

όμως $A'=0,5m \Rightarrow 1|\sigma\upsilon\nu\, 2,5\pi x|=0,5 \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu\, 2,5\pi x|=\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$\rightarrow 2,5\pi x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow 5\pi x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{6k\pm 2}{15}$

για $x>0$:

$x=\frac{6k-2}{15}$, $k=1$ $x_1=\frac{4}{15}m$ $\quad k=2$ $x_2=\frac{10}{15}m$

$x=\frac{6k+2}{15}$, $k=0$ $x_1'=\frac{2}{15}m$ $\quad k=1$ $x_2'=\frac{8}{15}m$

ελάχιστη οριζόντια απόσταση, $\Delta x = x_1 - x_1' \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{2}{15}m}$