1º ΘΕΜΑ

Λύσεις Διαγωνίσματος ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Β ΛΥΚΕΙΟΥ 14/1/24

A1. $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^3+(\lambda^2+2\lambda)x^2+\lambda^2+\lambda-2$

i) $\begin{cases} \lambda^3-4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-4)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=\pm 2 \\ \text{και} \\ \lambda^2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-2 \end{cases}$

Για να είναι το $P(x)$ σταθερό: $\boxed{\lambda=0}$ ή $\boxed{\lambda=-2}$

ii) $\begin{cases} \lambda^3-4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=\pm 2 \\ \text{και} \\ \lambda^2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-2 \\ \text{και} \\ \lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \text{ή} \\ \lambda=-2 \end{cases} \end{cases}$ $\boxed{\lambda=-2}$

iii) $\begin{cases} \lambda^3-4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=\pm 2 \\ \text{και} \\ \lambda^2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-2 \\ \text{και} \\ \lambda^2+\lambda-2\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1 \text{ και } \lambda\neq -2 \end{cases}$ $\boxed{\lambda=0}$

A2.

1) ΛΑΘΟΣ

2) ΛΑΘΟΣ

3) ΛΑΘΟΣ

4) ΣΩΣΤΟ

5) ΛΑΘΟΣ

6) ΛΑΘΟΣ

7) ΣΩΣΤΟ

8) ΣΩΣΤΟ

9) ΣΩΣΤΟ

10) ΛΑΘΟΣ

# 2ο ΘΕΜΑ

i)
$$\begin{cases} \varepsilon_1 : 8x+y-28=0 \\ \varepsilon_2 : x-y+1=0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 9x=27 \Leftrightarrow \boxed{x=3} \Rightarrow \boxed{y=4}$$

Άρα το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ : $(3,4)$

ii) $\vec{OM}=(3,4)$ οπότε $|\vec{OM}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

iii) $d(M,\varepsilon_3)=\dfrac{|3\cdot 3+4\cdot 4+5|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{30}{5}=6$

iv) $\vec{\alpha}=(2\lambda-1,\lambda+1)$

Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{OM}=0 \Leftrightarrow 3\cdot(2\lambda-1)+4(\lambda+1)=0$

$\Leftrightarrow 6\lambda-3+4\lambda+4=0 \Leftrightarrow 10\lambda=-1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=-1/10}$

v) $\varepsilon_3 : 3x+4y+5=0$

$\lambda_{\varepsilon_3}=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{3}{4}$

Άρα η ζητούμενη ευθεία $\varepsilon: y-y_M=\lambda(x-x_M)$

$\Leftrightarrow y-4=-\dfrac{3}{4}(x-3)$

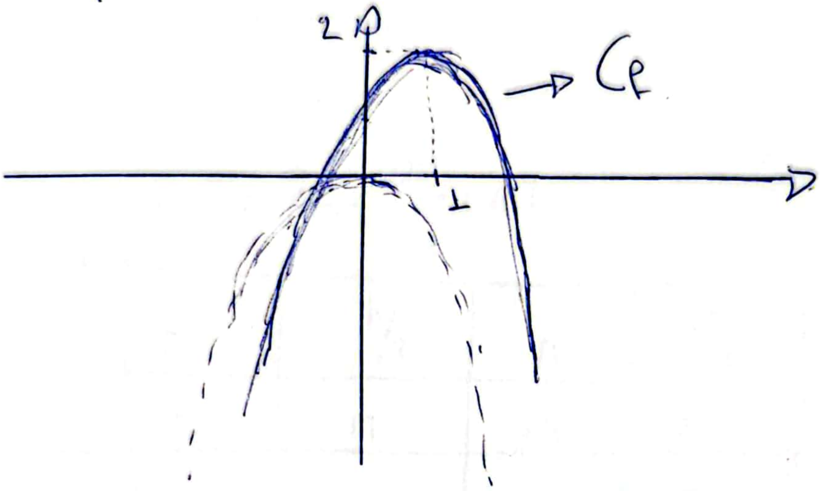
$\Leftrightarrow \boxed{y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{25}{4}}$

# 3ο ΘΕΜΑ

α). $f(x) = -x^2+2x+1 = -x^2+2x-1+2 = -(x^2-2x+1)+2$

$f(x) = -(x-1)^2+2$

Αφου $g(x) = -x^2$ ισχύει $f(x) = g(x-1)+2$ δηλαδή η $f(x)$ προκύπτει απο την $g(x)$ με οριζόντια μετατόπιση κατα 1 μονάδα δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.




β) i) Η f ↗ στο $(-\infty,1]$ και f ↘ στο $[1,+\infty)$

ii) ολικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=2$

iii) Η οριζόντια ευθεία $y=\kappa$ με $\kappa<2$ τέμνει την $C_f$ σε 2 σημεία οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ παρουσιάζει 2 ακριβώς λύσεις.

## 4º ΘΕΜΑ

Δ1. Ισχύει $-1 \le συν(αx) \le 1 \overset{\cdot 8α>0}{\Longleftrightarrow} -8α \le 8α συν(αx) \le 8α$.

$\Leftrightarrow -8α \le f(x) \le 8α$.

Το μέγιστο της συνάρτησης είναι το $8α$. Άρα $8α = 4$

$\Leftrightarrow \boxed{α = \frac{1}{2}}$

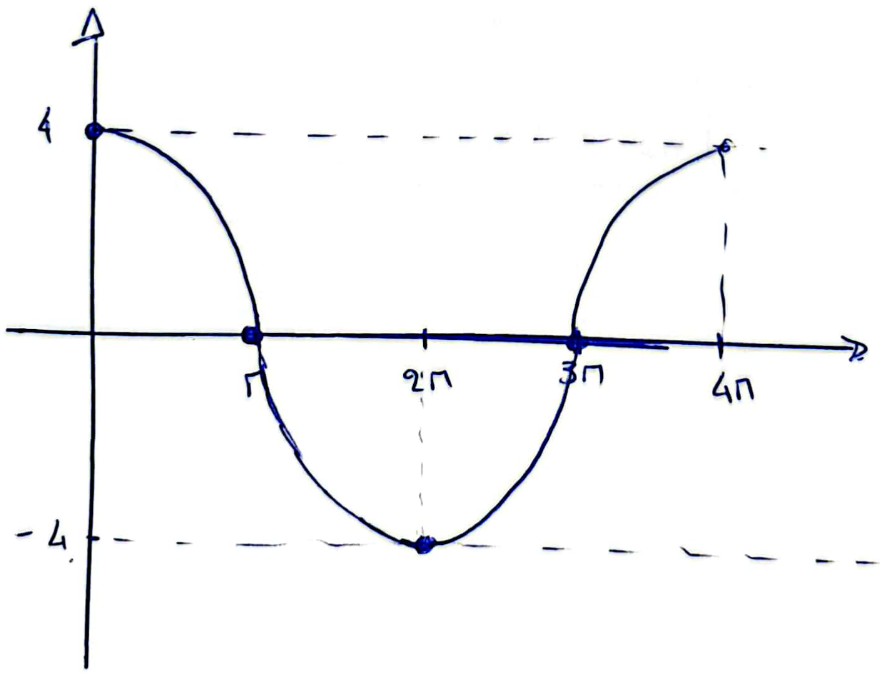
Δ2. $f(x) = 4συν\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in [0, 4π]$

Ελάχιστο: $-8 \cdot \frac{1}{2} = -4$

Μέγιστο: $8 \frac{1}{2} = 4$

Περίοδος: $T = \frac{2π}{ω} = \frac{2π}{\frac{1}{2}} = 4π$.

| $\frac{x}{2}$ | $0$ | $π/2$ | $π$ | $3π/2$ | $2π$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $π$ | $2π$ | $3π$ | $4π$ |
| $συν\frac{x}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $f(x) = 4συν\frac{x}{2}$ | $4$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $4$ |



# 4º ΘΕΜΑ

Δ3. $f(x)=2 \Leftrightarrow 4συν\frac{x}{2}=2 \Leftrightarrow συν\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow συν\frac{x}{2}=συν\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=2κ\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=4κ\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \; κ\in\mathbb{Z}$

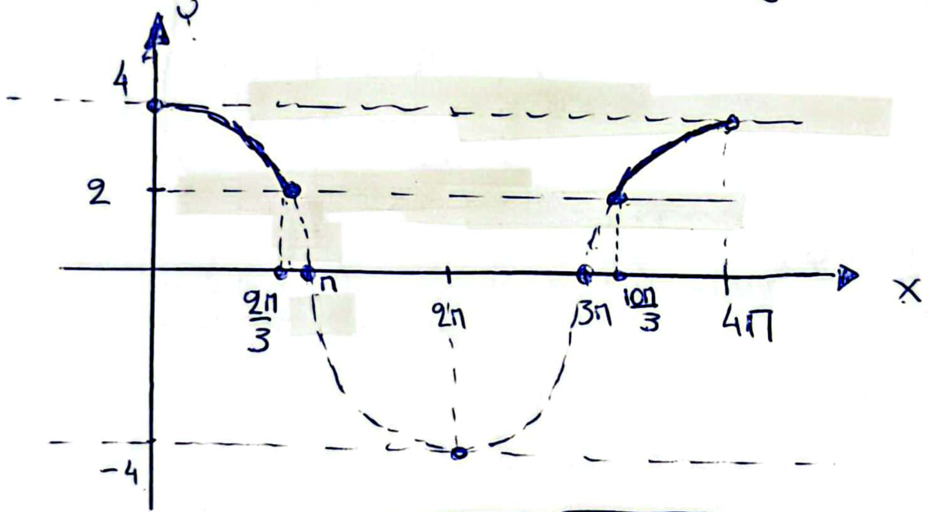
- $0\le x\le 4\pi \Leftrightarrow 0\le 4κ\pi+\frac{2\pi}{3}\le 4\pi \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le 4κ\le\frac{10}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le κ\le\frac{5}{6} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} κ=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2\pi}{3}}$

- $0\le x\le 4\pi \Leftrightarrow 0\le 4κ\pi-\frac{2\pi}{3}\le 4\pi \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le 4κ\le\frac{14}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\le κ\le\frac{7}{6} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} κ=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{10\pi}{3}}$

Δ4. $f(x)>2 \Rightarrow C_f$ πάνω από την οριζόντια ευθεία $y=2$




Συνεπώς $\boxed{x\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{10\pi}{3},4\pi\right]}$

Δ5. $\sqrt{-f(x)-4} = (f(x))^3 + 3(f(x))^2 + f(x) + 20 \quad (1)$

Πρέπει $-f(x)-4 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq -4 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} \leq -4$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} \leq -1$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} = -1 \xrightarrow{x\in[0,4\pi]} \boxed{x=2\pi}$

Τότε η (1) $\Rightarrow$ $0 = (-4)^3 + 3(-4)^2 + (-4) + 20$

$0 = -64 + 48 + 16$

$0 = 0$

Άρα $\boxed{x=2\pi}$ μοναδική λύση της εξίσωσης.

Δ6. $\begin{cases} \left(\frac{f(x)}{4}\right)^2 - \left(\frac{f(y)}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ 2\,\frac{f(x)\cdot f(\pi-y)}{16} = 1 \end{cases}$ $\quad x, y \in [0,\pi]$

$\xrightarrow{f(x)=4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}} \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu^2\frac{y}{2} = \frac{1}{4} \\ \frac{4\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\cdot 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi-y}{2}}{8} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu^2\frac{y}{2} = \frac{1}{4} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu^2\frac{y}{2} = \frac{1}{4} \\ 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\cdot\eta\mu\frac{y}{2} = 1 \end{cases} \xrightarrow[\lambda=\eta\mu\frac{y}{2}\in[0,1]]{\kappa=\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\in[0,1]}$

$\begin{cases} \kappa^2 - (1-\lambda^2) = \frac{1}{4} \\ 2\kappa\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2\kappa} \end{cases} \Rightarrow \kappa^2 + \frac{1}{4\kappa^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4\kappa^4 - 5\kappa^2 + 1 = 0$

$\Delta = 9, \ \kappa^2 = \frac{5\pm3}{8}$

$\Rightarrow \kappa^2 = 1 \xrightarrow{\kappa\geq 0} \kappa = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

ή $\Rightarrow \kappa^2 = 1/4 \xrightarrow{\kappa\geq 0} \kappa = 1/2 \Rightarrow \lambda = 1$

# Δ6 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

(I) $\begin{cases} \kappa = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} = 1 \xLeftrightarrow{\frac{x}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0} \\ \text{και} \\ \lambda = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\psi}{2} = \frac{1}{2} \xLeftrightarrow{\frac{\psi}{2}\in[0,\pi/2]} \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \boxed{\psi = \frac{\pi}{3}} \end{cases}$

(II) $\begin{cases} \kappa = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \xLeftrightarrow{\frac{x}{2}\in[0,\pi/2]} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2\pi}{3}} \\ \text{και} \\ \lambda = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\psi}{2} = 1 \xLeftrightarrow{\frac{\psi}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\psi = \pi} \end{cases}$