Διαγώνισμα Β' Λυκείου Μαθηματικά
19/01/2025

ΘΕΜΑ Α.

A1 (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

(10μ.)

A2 $\varepsilon_1: 2x+y=5$

$\varepsilon_2: x-2y=5$

$\varepsilon_3: y=-2$.

(i) Ν.Δ.Ο. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

$\lambda_1 = -\frac{A}{B} = -2$

$\lambda_2 = -\frac{A}{B} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

άρα $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

(ii) Για να βρούμε το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους

$$2 \cdot \left| \begin{aligned} 2x+y&=5 \\ x-2y&=5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4x+\cancel{2y}&=10 \\ x-\cancel{2y}&=5 \quad (+) \\ \hline 5x&=15 \\ \boxed{x=3} \end{aligned}$$

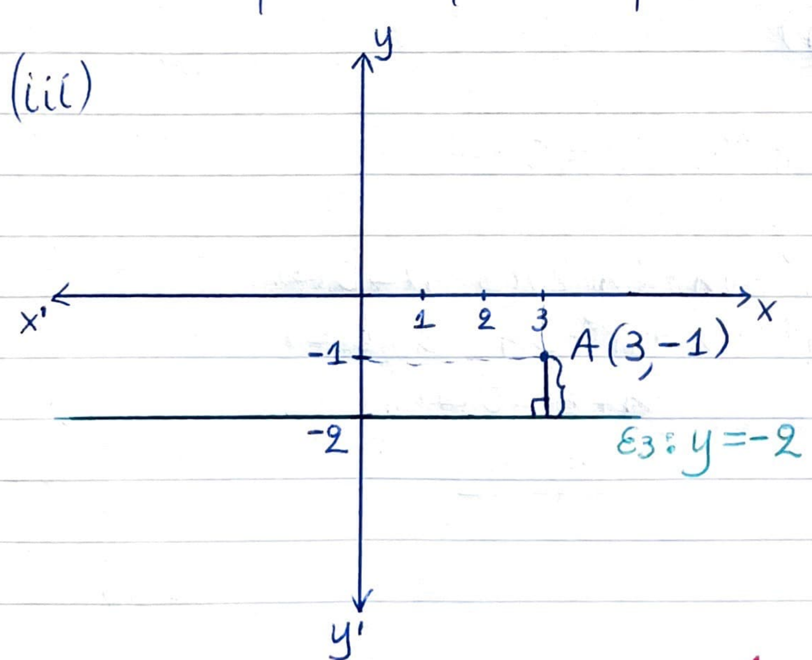
και $y=5-2x$

$y=5-6$

$\boxed{y=-1}$

άρα σημείο τομής $A(3,-1)$

(iii)



$\varepsilon_3: y+2=0$

$d(A,\varepsilon_3) = \frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$d(A,\varepsilon_3) = \frac{|0\cdot 3+1\cdot(-1)+2|}{\sqrt{0+1^2}} = 1$.

$d(A,\varepsilon_3)=1$

(15μ.)

ΘΕΜΑ Β

έστω $\varepsilon_1 \perp \vec{v} = (-2, 4)$ και διέρχεται από το $A(10, 5)$

ε_2 διέρχεται από τα $B(3, -1)$ και $\Gamma(-6, 2)$

B1 $\varepsilon_1 \perp \vec{v} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_{\vec{v}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$

$\lambda_{\vec{v}} = \frac{y}{x} = \frac{4}{-2} = -2$

άρα η εξίσωση της ε_1 είναι:

$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - 5 = \frac{1}{2}(x - 10) \Leftrightarrow y - \cancel{5} = \frac{1}{2}x - \cancel{5}$

$\boxed{\varepsilon_1: y = \frac{1}{2}x}$

$\lambda_2 = \lambda_{B\Gamma} = \frac{2 - (-1)}{-6 - 3} = \frac{2 + 1}{-6 - 3} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$

άρα η εξίσωση της ε_2 είναι:

$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - (-1) = -\frac{1}{3}(x - 3) \Leftrightarrow y + \cancel{1} = -\frac{1}{3}x + \cancel{1}.$

$\boxed{\varepsilon_2: y = -\frac{1}{3}x}$

(5μ)

B2 $\zeta_1: (\lambda - 3)x + (\lambda - 4)y - 28 = 0$ και $\zeta_2: \lambda x + (\lambda - 2)y - 12 = 0$

όπου $\zeta_1 // \zeta_2$.

Θεωρούμε διανύσματα παράλληλα στις ευθείες

$\zeta_1 // \vec{\delta_1} = (B, -A) = (\lambda - 4, 3 - \lambda)$

$\zeta_2 // \vec{\delta_2} = (B, -A) = (\lambda - 2, -\lambda)$

άρα $\zeta_1 // \zeta_2 \Leftrightarrow \vec{\delta_1} // \vec{\delta_2} \Leftrightarrow \det(\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 3 - \lambda \\ \lambda - 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 4\lambda - (\lambda - 2)(3 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$-\cancel{\lambda^2} + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$-\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{\lambda = 6.}$

(5μ)

B3. K σημείο τομής $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x \\ y=-\frac{1}{3}x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x=-\frac{1}{3}x \Rightarrow 3x=-2x \Rightarrow 5x=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}$$

άρα $K(0,0)$

Λ σημείο τομής ε_1, ζ_1

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x \\ 3x+2y-28=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x \\ 3x+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x-28=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x \\ 3x+x-28=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x \\ 4x=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{7}{2} \\ x=7 \end{array} \quad \text{άρα } \Lambda\left(7,\frac{7}{2}\right)$$

M σημείο τομής ε_2, ζ_1.

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{1}{3}x \\ 3x+2y-28=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-3y \\ 3\cdot(-3y)+2y-28=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-3y \\ -9y+2y-28=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-3y \\ -7y=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=12 \\ y=-4 \end{array} \quad \text{άρα } M(12,-4)$$

$$(K\Lambda M)=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{K\Lambda},\vec{KM})\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 7 & \frac{7}{2} \\ 12 & -4 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-28-\cancel{12}^{6}\cdot\frac{7}{\cancel{2}}\right|$$

$$(K\Lambda M)=\frac{1}{2}|-28-42|=\frac{1}{2}|-70|=\frac{1}{2}\cdot 70=35 \text{ τ.μ.}$$

αφού $\vec{K\Lambda}=\left(7,\frac{7}{2}\right)$ και $\vec{KM}=(12,-4)$

$\boxed{(K\Lambda M)=35 \text{ τ.μ.}}$ (7μ)

B4. Να βρείτε τα σημεία N της $\zeta_2: 6x+4y-12=0$. για τα οποία ισχύει ότι $d(N,\varepsilon_1)=\sqrt{2}\cdot d(N,\varepsilon_2)$

Εστω σημείο $N(x_N, y_N)$ το οποίο ανήκει στην ζ_2.

άρα $6x_N+4y_N-12=0 \Leftrightarrow 3x_N+2y_N-6=0 \Leftrightarrow 2y_N=6-3x_N$

$y_N=3-\frac{3}{2}x_N$

άρα το σημείο $N\left(x_N, 3-\frac{3}{2}x_N\right)$

$\varepsilon_1: x-2y=0 \qquad \varepsilon_2: x+3y=0$

$$d(N,\varepsilon_1)=\sqrt{2}\cdot d(N,\varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|x_N-2(3-\frac{3}{2}x_N)|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{|x_N+3(3-\frac{3}{2}x_N)|}{\sqrt{1+3^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_N-6+3x_N|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\cdot|x_N+9-\frac{9}{2}x_N|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\sqrt{10}}\cdot|4x_N-6|=\cancel{\sqrt{10}}\cdot\left|9-\frac{7}{2}x_N\right| \Leftrightarrow$$

$4x_N-6=9-\frac{7}{2}x_N$ ή $4x_N-6=-9+\frac{7}{2}x_N$

$8x_N-12=18-7x_N \qquad 8x_N-12=-18+7x_N$

$15x_N=30 \qquad \boxed{x_N=-6}$

$\boxed{x_N=2} \qquad y_N=3-\frac{3}{2}(-6)$

$y_N=3-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}=0 \qquad \boxed{y_N=12}$

$\boxed{y_N=0}$

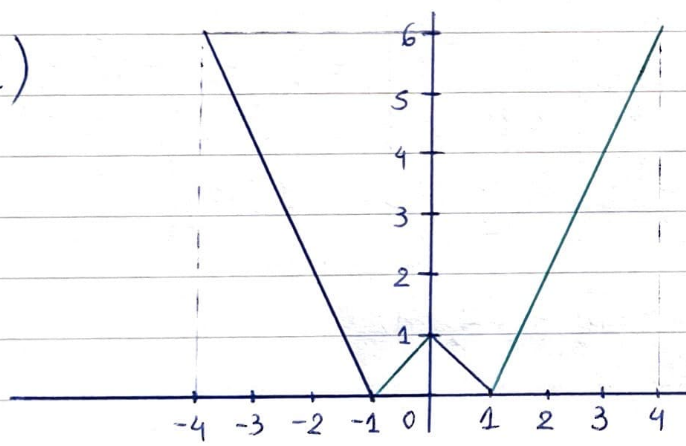
άρα $N(2,0)$ ή $N(-6,12)$

(8μ)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) ορισμός σχολικού σελ. 35 (4μ)

ii)



Γνωρίζουμε ότι η f: άρτια με $A_f=[-4,4]$ άρα σχεδιάζουμε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f ώστε να έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.

(A) Η f ↘ στο $[-4,-1]$ και στο $[0,1]$
Η f ↗ στο $[-1,0]$ και στο $[1,4]$.

(B) $f_{max}=f(-4)=f(4)=6$
άρα η f έχει μέγιστο το 6 στις θέσεις $x_1=-4, x_2=4$
$f_{min}=f(-1)=f(1)=0$
άρα η f έχει ελάχιστο το 0 στις θέσεις $x_3=-1$ και $x_4=1$

(8μ)

$\boxed{Γ2}$ i) − (Γ) ii) − (B) (iii) − (Γ) (iv) − (B) (8μ)

$\boxed{Γ3}$ Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου.
$P(x)=(\lambda^2-9)x^3+(\lambda^2-3\lambda)x^2+(\lambda^2-4\lambda+3)x+3-\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$
έχουμε: $P(x)=\underline{(\lambda-3)(\lambda+3)}x^3+\lambda(\lambda-3)x^2+(\lambda-3)(\lambda-1)x+3-\lambda$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις
- Αν $(\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0$ άρα $\lambda\neq 3$ και $\lambda\neq -3$.
  τότε το $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού
- Αν $\lambda=3$. τότε με αντικατάσταση.
  $P(x)=0$ δεν ορίζεται ο βαθμός του.
- Αν $\lambda=-3$ τότε με αντικατάσταση
  $P(x)=18x^2+24x+6$ είναι $2^{ου}$ βαθμού

(5μ.)

ΘΕΜΑ Δ.

$\boxed{Δ1}$ i) $2\text{συν}(2x-\frac{\pi}{3})=1 \Leftrightarrow \text{συν}(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}(2x-\frac{\pi}{3})=\text{συν}\frac{\pi}{3}$

άρα $2x-\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$
δηλαδή $2x-\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $2x-\cancel{\frac{\pi}{3}}=2\kappa\pi-\cancel{\frac{\pi}{3}}$
$2x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}$ $2x=2\kappa\pi$
$\boxed{x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}}$ $\kappa\in\mathbb{Z}$ $\boxed{x=\kappa\pi}$

ii) $\eta\mu x+\text{συν}x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\text{συν}x \overset{\text{συν}x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu x}{\text{συν}x}=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-1$.
$\varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{4})$

άρα $\boxed{x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}}$

iii) $\dfrac{συνx\cdot σφx}{1-ημx}=3 \Leftrightarrow \dfrac{συνx\cdot\frac{συνx}{ημx}}{1-ημx}=3 \Leftrightarrow \dfrac{συν^2x}{ημx}=3-3ημx \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{περιορισμοί}\\ 1-ημx\neq 0\\ ημx\neq 1\end{array}}$$

$συν^2x=3ημx-3ημ^2x \Leftrightarrow$

$1-ημ^2x=3ημx-3ημ^2x \Leftrightarrow$

$2ημ^2x-3ημx+1=0$

θέτω $ω=ημx$

άρα έχω $2ω^2-3ω+1=0$

$Δ=9-4\cdot 2=9-8=1.$

$ω_{1,2}=\dfrac{3\pm 1}{4}=$ 1 απορρίπτεται, $\dfrac{1}{2}$ δεκτή.

$ημx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$ημx=ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow$

$x=\begin{cases}2κπ+\frac{π}{6}\\ \text{ή}\\ 2κπ+π-\frac{π}{6}\end{cases}$ $κ\in\mathbb{Z}$ άρα $\boxed{x=\begin{cases}2κπ+\frac{π}{6}\\ \text{ή}\\ 2κπ+\frac{5π}{6}\end{cases}\quad κ\in\mathbb{Z}}$

(9μ.)

$\boxed{Δ2}$ $A=ημ^2(5π-x)+συν(3π+x)\cdot συν(4π-x)+2ημ^2\left(x-\frac{5π}{2}\right)$

i) $A=ημ^2(π-x)+συν(π+x)\cdot συν(-x)+2ημ^2\left(\frac{5π}{2}-x\right)$

$A=ημ^2x+(-συνx)\cdot συνx+2ημ^2\left(\cancel{\frac{4π}{2}}+\frac{π}{2}-x\right)$

$A=ημ^2x-συν^2x+2ημ^2\left(\frac{π}{2}-x\right)$

$A=ημ^2x-συν^2x+2συν^2x$

$A=ημ^2x+συν^2x$

$A=1.$

ii) Γνωρίζουμε ότι $T=π \Leftrightarrow \frac{2π}{ω}=π \Leftrightarrow 2π=π\cdot ω \Leftrightarrow \boxed{ω=2}$

$-1\leq ημ2x\leq 1 \overset{\cdot B<0}{\Leftrightarrow} -B\geq Bημ2x\geq B \Leftrightarrow B\leq Bημ2x\leq -B \overset{+1}{\Leftrightarrow}$

$1+B\leq 1+Bημ2x\leq 1-B$

συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το $1-B$

και εφόσον γνωρίζω από τα δεδομένα ότι $\max f=5$

$1-B=5$

$-B=4$

$\boxed{B=-4}$ άρα $f(x)=1-4ημ2x.$

εξέτασε αν f άρτια ή περιττή

$f(x)=1-4ημ2x,\ x\in\mathbb{R}$

- $A_f=\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=1-4\cdot ημ(-2x)=1-(-4ημ2x)=1+4ημ2x$

$f(-x)\neq f(x)$ και $f(-x)\neq -f(x)$

άρα ούτε άρτια ούτε περιττή

iii) Να λύσετε $f(x)=3$ στο $[-\pi,\pi]$

$f(x)=3 \Leftrightarrow 1-4ημ2x=3 \Leftrightarrow -4ημ2x=2 \Leftrightarrow ημ2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$ημ2x=-ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow ημ2x=ημ\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

άρα $2x=\begin{cases}2κ\pi-\frac{\pi}{6}\\ ή\\ 2κ\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\end{cases},\ κ\in\mathbb{Z}$ άρα $\boxed{x=\begin{cases}κ\pi-\frac{\pi}{12}\\ ή\\ κ\pi+\frac{7\pi}{12}\end{cases},\ κ\in\mathbb{Z}}$

όμως $-\pi\le x\le\pi \Leftrightarrow -\pi\le κ\pi-\frac{\pi}{12}\le\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}-\pi\le κ\pi\le\frac{\pi}{12}+\pi \Leftrightarrow$

$-\frac{11\cancel{\pi}}{12}\le κ\cancel{\pi}\le\frac{13\cancel{\pi}}{12} \Leftrightarrow -\frac{11}{12}\le κ\le\frac{13}{12}$ άρα $κ=0,\ κ=1.$

δηλαδή $\boxed{x_1=-\frac{\pi}{12}}$, $\boxed{x_2=\frac{11\pi}{12}}$.

και $-\pi\le x\le\pi \Leftrightarrow -\pi\le κ\pi+\frac{7\pi}{12}\le\pi \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12}-\pi\le κ\pi\le-\frac{7\pi}{12}+\pi \Leftrightarrow$

$-\frac{19\cancel{\pi}}{12}\le κ\cancel{\pi}\le\frac{5\cancel{\pi}}{12} \Leftrightarrow -\frac{19}{12}\le κ\le\frac{5}{12}$ άρα $κ=-1,\ κ=0.$

δηλαδή $\boxed{x_3=-\frac{5\pi}{12}}$, $\boxed{x_4=\frac{7\pi}{12}}$

iv) γραφική παράσταση της f και της $y=3$.

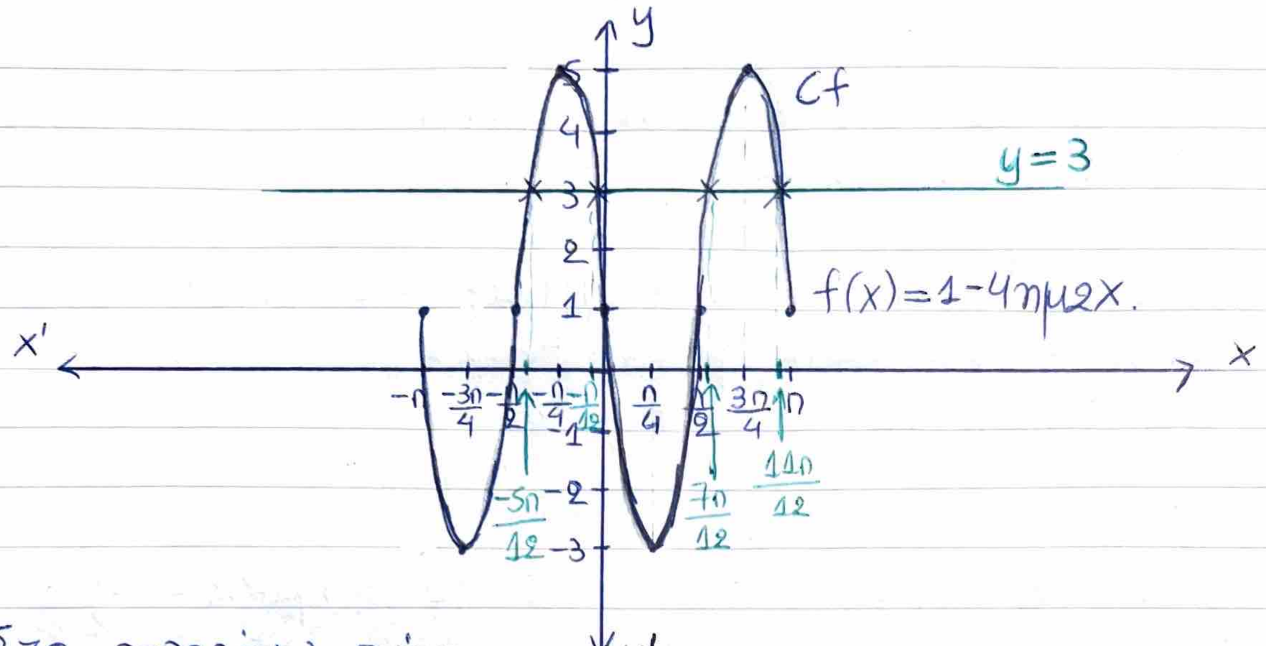
$f(x)=1-4ημ2x,\ x\in\mathbb{R}.$

περίοδος $T=\pi$

βήμα $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$

πίνακας τιμών

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$ημ2x$	0	1	0	-1	0
$-4ημ2x$	0	-4	0	4	0
$1-4ημ2x$	1	-3	1	5	1.



Στο παραπάνω σχήμα αποτυπώνεται η γραφική παράσταση της f, η οριζόντια ευθεία y=3 και το πλήθος των λύσεων της f(x)=3 δηλαδή τα κοινά τους σημεία.

(16μ.)