ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

~~11~~ 19/3/2023

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A4}$ Ψ $\quad f(x) = |x| - x,\ x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x| + x,\ x \in \mathbb{R}$

$f(x) \cdot g(x) = |x|^2 - x^2 = 0$

$\boxed{A5}$ α) Σ β) Λ γ) Σ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ (α) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{x - 1} = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2\sqrt{x^2+3} - 4}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4(x^2+3) - 16}{(x-1)(2\sqrt{x^2+3} + 4)} = \cdots = 1$

Άρα $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

▸ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} = -1$

(β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^2(x) + 3f(x) - 4}{f^2(x) - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(f(x) - 1)}(f(x) + 4)}{\cancel{(f(x) - 1)}(f(x) + 1)} = \dfrac{5}{2}$

$\boxed{B2}$ (α) $A_g = [-4, -1) \cup (-1, 5)$, $g(A) = [-2, 3)$

(β) i) $\nexists$ ii) $\nexists$ iii) 1 iv) −2

γ) i) 3 ii) 5 iii) 4

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{\Gamma_1}$ $f(1)=3 \iff 11+2\alpha = 3(1+\alpha) \iff \alpha = 8$

$\boxed{\Gamma_2}$ $A_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x+8)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\Gamma_3}$ $f(x) = \dfrac{x+8}{x^2-2x+4}, \quad x \neq -2$

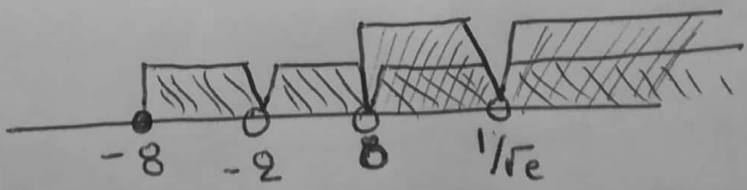
• $f(x) \leq 1 \iff \dfrac{x+8}{\underbrace{x^2-2x+4}_{\Delta<0}} \leq 1 \iff x+8 \leq x^2-2x+4$

$\iff x^3-3x-4 \geq 0$

	-1		4	
$+$	0	$-$	0	$+$

Τελικά, $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,-1] \cup [4,+\infty)$

$\boxed{\Gamma_4}$ ΠΡΕΠΕΙ: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \iff x \geq -8 \\ x \neq -2 \\ x > 0 \\ 2\ln x + 1 \neq 0 \to x \neq 1/\sqrt{e} \end{cases}$



άρα $A_g = \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 $f^2(x)+g^2(x)-2f(x)\sqrt{1-x^2}-2g(x)\sqrt{1-|x|}-x^2-|x|+1+1=0$

$f^2(x)-2f(x)\sqrt{1-x^2}+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2+g^2(x)-2g(x)\sqrt{1-|x|}+\sqrt{1-|x|}^{\,2}=0$

$\left(f(x)-\sqrt{1-x^2}\right)^2+\left(g(x)-\sqrt{1-|x|}\right)^2=0$

άρα $f(x)-\sqrt{1-x^2}=0$ κ' $g(x)-\sqrt{1-|x|}=0$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ κ' $g(x)=\sqrt{1-|x|}$, $x\in[-1,1]$

Δ2 $\dfrac{f}{g}$ → ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ: $A_{\frac{f}{g}}=(-1,1)$

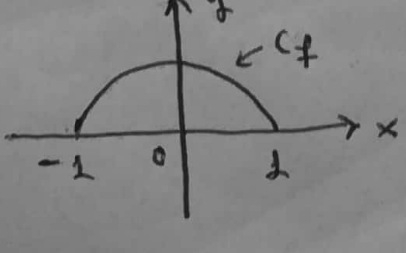
→ ΤΥΠΟΣ: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-|x|}}=\dfrac{\sqrt{(1-|x|)(1+|x|)}}{\sqrt{1-|x|}}=\sqrt{1+|x|}$, $x\in(-1,1)$

ΟΠΟΤΕ $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\sqrt{1+|x|}$, $x\in(-1,1)$

- $h(x)=\sqrt{1+|x|}$, $x\in\mathbb{R}$
- $\dfrac{f}{g}\neq h$ γιατί $A_{\frac{f}{g}}\neq A_h$ όμως $h=\dfrac{f}{g}$ όταν $x\in(-1,1)$

Δ3 α) $(MO)=\sqrt{x^2+f^2(x)}=\sqrt{x^2+1-x^2}=\sqrt{1}=1$

β) Με βάση το ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι κάθε σημείο της C_f βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ κ' $\rho=1$ κ' επειδή $f(A)\subseteq[0,+\infty)$ τότε $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[-1,1]$. Άρα η C_f είναι το ημικύκλιο του κύκλου $K(0,0)$ κ' $\rho=1$



γ) $E=\dfrac{\pi\rho^2}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ τ.μ.

$\boxed{\Delta 4}$ • $x \in (-1, 1)$

ΟΤΑΝ $\ln\lambda < 1$ ή $\ln\lambda > 1$, ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΝΟΗΜΑ

Η ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x \to \ln\lambda + 1} \frac{x}{f(x)}$

Άρα, $-1 \le \ln\lambda \le 1 \overset{\lambda > 0}{\iff}$

$\iff \ln e^{-1} \le \ln\lambda \le \ln e \iff e^{-1} \le \lambda \le e$

άρα $\lambda \in [\frac{1}{e}, e]$.