Διαγώνισμα Β' Λυκείου 19/05/2024

ΘΕΜΑ Α.

$\boxed{A1}$ Ορισμός σελ.23 σχολικού

$\boxed{A2}$ Ορισμός σελ.31 σχολικού

$\boxed{A3}$ Ορισμός σελ.32 σχολικού

$\boxed{A4}$ Θεώρημα σελ.51 σχολικού

$\boxed{A5}$ Ψευδής

Αιτιολόγηση:

Έστω δύο συναρτήσεις

$f(x)=\begin{cases} x+2, & x<1 \\ 0, & x\geq 1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-3x, & x\geq 1 \end{cases}$

παρατηρούμε ότι $f(x)\cdot g(x)=0$, αλλά δεν είναι καμία μηδενική συνάρτηση

ΘΕΜΑ Β.

$\boxed{B1}$ Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f

άρα $A_f=(1,5)\cup(5,9]$

Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f

άρα $f(A)=(-2,5]$

$\boxed{B2}$ Τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία στα οποία έχουμε $f(x)=0$ δηλαδή στα $x_1=2$ και $x_2=6$

$A(2,0)$ $B(6,0)$

$\boxed{B3}$ $g(x)=\ln(-f(x))+5x-3$

πρέπει $\begin{cases} x\in A_f \\ -f(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(1,5)\cup(5,9] \\ f(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(1,5)\cup(5,9] \\ x\in(1,2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in(1,2)$ άρα $A_g=(1,2)$

$\boxed{B4}$ • $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$

• $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$.

• $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 3 = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5} f(x)$

• $\lim_{x\to 7^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 7^+} f(x) = 4$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 7} f(x)$

• $\lim_{x\to 9} f(x) = \lim_{x\to 9^-} f(x) = 3$

• $\lim_{x\to 8} f(f(x))$ θέτω $f(x) = u$
και έχουμε $\lim_{x\to 8} f(x) = u_0$

$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^+} f(x) = 5 = u_0$

άρα $\lim_{x\to 8} f(f(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = \lim_{u\to 5} f(u) = 3$

• $\lim_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$

Έχουμε $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ διότι $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$ και
$f(x) < 0$ για κάθε $x < 2$ κοντά στο 2

και $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ διότι $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$ και
$f(x) > 0$ για κάθε $x > 2$ κοντά στο 2

άρα το όριο δεν υπάρχει

• $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ διότι $\lim_{x\to 6} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$
για κάθε $x \neq 6$ κοντά στο 6

ΘΕΜΑ Γ.

$\boxed{Γ1}$ $\phi(x) = \ln(x^2-4x+3)$ $\quad\quad$ $w(x) = \ln(x-1) + \ln(x-3)$

πρέπει $x^2-4x+3>0$
$(x-1)(x-3)>0$
$x<1$ ή $x>3$

$A\phi = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

πρέπει $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
και $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$

$Aw = (3, +\infty)$

$A\phi \neq Aw$ άρα γενικά $\phi \neq w$ όμως στο $A\phi \cap Aw = (3, +\infty)$ έχουμε:

$w(x) = \ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln(x-1)\cdot(x-3) =$
$= \ln(x^2-4x+3) = \phi(x)$

άρα $\phi = w$ στο $(3, +\infty)$

$\boxed{Γ2}$ $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$

Η $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ ορίζεται όταν:

$\left.\begin{array}{l} x \in Ag \\ g(x) \in Af \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 1 \\ -2 \leq \sqrt{x-1} \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x-1 \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{array}\right\}$ $A_{f\circ g} = [1, 5]$

πεδία ορισμού

πρέπει: $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow$
$-2 \leq x \leq 2$
$Af = [-2, 2]$
πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow$
$x \geq 1$
$Ag = [1, +\infty)$

$f(g(x)) = \sqrt{4 - \sqrt{x-1}^2} = \sqrt{4-(x-1)} = \sqrt{5-x}$

άρα $f(g(x)) = \sqrt{5-x}$ με $x \in [1, 5]$

$\boxed{Γ3}$ $x^2+4x \leq h(x) \leq 3x^2+2$, $x>-3$

i) $\lim_{x\to 1} h(x) =$;

$\lim_{x\to 1}(x^2+4x) = 5$ και $\lim_{x\to 1}(3x^2+2) = 5$

άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$

ii) $x^2+4x \le h(x) \le 3x^2+2 \Leftrightarrow$

$x^2+4x-5 \le h(x)-5 \le 3x^2-3$

• <u>Αν $x>1$</u> τότε $\dfrac{x^2+4x-5}{x-1} \le \dfrac{h(x)-5}{x-1} \le \dfrac{3(x^2-1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x+5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \le \dfrac{h(x)-5}{x-1} \le \dfrac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \Leftrightarrow x+5 \le \dfrac{h(x)-5}{x-1} \le 3x+3$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+5)=6$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+3)=6$

άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{h(x)-5}{x-1}=6$ (1)

• <u>Αν $x<1$</u> τότε $\dfrac{x^2+4x-5}{x-1} \geq \dfrac{h(x)-5}{x-1} \geq \dfrac{3(x^2-1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+5)}{\cancel{x-1}} \geq \dfrac{h(x)-5}{x-1} \geq \dfrac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \Leftrightarrow 3x+3 \le \dfrac{h(x)-5}{x-1} \le x+5.$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(3x+3)=6$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+5)=6$

άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{h(x)-5}{x-1}=6$ (2)

από σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-5}{x-1}=6.$

iii) $x^2+4x-1 \le h(x)-1 \le 3x^2+1.$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x-1)=4$ και $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+1)=4$

άρα από κριτήριο παρεμβ. $\lim\limits_{x\to 1}(h(x)-1)=4>0$

επομένως $h(x)-1>0$ κοντά στο 1.

οπότε αναζητάμε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-1-4}{\sqrt{x+3}-2}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(h(x)-5)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(h(x)-5)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{h(x)-5}{x-1}\cdot(\sqrt{x+3}+2)\right]=6\cdot(\sqrt{4}+2)=6\cdot 4=24$

iv) $\lim_{x\to 0} h\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)$ θέτω $\frac{\eta\mu x}{x} = u$

$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$ άρα $\lim_{u\to 1} h(u) = 5$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{Δ1}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\lim_{x\to 1}\frac{f(2)\cdot x^2 + f(1)\cdot x - 4}{x-1} = 5$

Θέτω $g(x) = \frac{f(2)\cdot x^2 + f(1)\cdot x - 4}{x-1}$ με $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$

$f(2)\cdot x^2 + f(1)\cdot x - 4 = (x-1)\cdot g(x)$ άρα

$\lim_{x\to 1}\left[f(2)\cdot x^2 + f(1)\cdot x - 4\right] = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot g(x)\right] \Leftrightarrow$

$f(2) + f(1) - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$f(2) + f(1) = 4.$ (1)

$\lim_{x\to 1}\frac{f(2)\cdot x^2 + f(1)\cdot x - 4}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f(2)x^2 + f(1)\cdot x - f(2) - f(1)}{x-1} = 5$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(2)(x^2-1) + f(1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left[f(2)(x+1) + f(1)\right]}{\cancel{x-1}} = 5$

$2f(2) + f(1) = 5$ (2)

άρα αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις έχουμε:

(2)-(1): $2f(2) + \cancel{f(1)} - f(2) - \cancel{f(1)} = 5 - 4 \Leftrightarrow f(2) = 1.$

(1): $f(2) + f(1) = 4 \Leftrightarrow 1 + f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1)$

$\boxed{Δ2}$ Η f γνησίως μονότονη και έχουμε $f(1)=3$ $f(2)=1$

$1<2 \Leftrightarrow f(1) > f(2) \Leftrightarrow 3 > 1$

επομένως η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$\boxed{Δ3}$ Να λυθεί η ανίσωση $f(5^x) - f(3^x + 4^x) < 0 \Leftrightarrow$

$f(5^x) < f(3^x + 4^x) \underset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} 5^x > 3^x + 4^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} < 1 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 < 0$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, $A_g=\mathbb{R}$
και μελετώ τη μονοτονία της
για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}$ (1)
με $x_1<x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}-1$ (2)

$(1)+(2): \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}-1 \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$

άρα η g γνησίως φθίνουσα
Επίσης $g(2)=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}-1=0.$

Επομένως η ανίσωση γίνεται
$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1<0 \Leftrightarrow g(x)<0 \Leftrightarrow g(x)<g(2) \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} x>2.$

$\boxed{\Delta 4}$ Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=x^2-2x+4$ για $x\geq 1$

για $x\geq 1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)\leq f(1) \Leftrightarrow f(x)\leq 3$ (1)
Επίσης θέτουμε $h(x)=x^2-2x+4$ για $x\geq 1$
και γνωρίζουμε ότι η $h\searrow$ στο $\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right]\to(-\infty,1]$
και η $h\nearrow$ στο $\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right)\to[1,+\infty)$

για $x\geq 1 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)\geq h(1) \Leftrightarrow h(x)\geq 3.$ (2)
Δηλαδή η εξίσωση γίνεται
$f(x)=h(x)$ από σχέσεις (1) και (2) έχουμε
$f(x)=h(x)=3 \Leftrightarrow x=1.$