Διαγώνισμα Β' Λυκείου Μαθηματικά

10/11/2024.

Θέμα Α.

A1. Ορισμός σελ. 41 Σχολικού

A2. i) $\vec{AO}+\vec{OB}=\vec{AB}$

ii) $\vec{AB}+\vec{\Delta A}+\vec{B\Delta}+\vec{A\Gamma}=\vec{AB}+\vec{B\Delta}+\vec{\Delta A}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Gamma}$

iii) $(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Gamma}})=45^\circ$

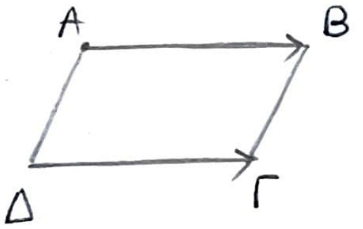
iv) $(\widehat{\vec{AB},\vec{B\Delta}})=135^\circ$

v) $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=|\vec{AB}|\,|\vec{A\Gamma}|\text{συν}45^\circ=1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{2}=1.$

vi) $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$

A3 Έστω $A(-2,1)$, $B(1,4)$ και $\Delta(2,-3)$ τρία σημεία στο επίπεδο

i) Γ; ώστε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.



ΑΒΓΔ παρ/μο έστω $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$

$\vec{AB}=\vec{\Delta\Gamma}$

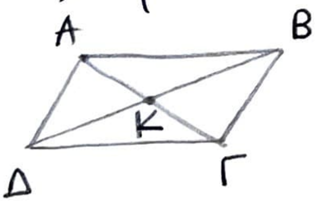
$(1+2,\,4-1)=(x_\Gamma-2,\,y_\Gamma+3)$

$(3,3)=(x_\Gamma-2,\,y_\Gamma+3)$

$\left.\begin{array}{l} x_\Gamma-2=3 \\ y_\Gamma+3=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_\Gamma=5 \\ y_\Gamma=0. \end{array}$

άρα $\Gamma(5,0)$

ii) Βρες τις συντεταγμένες του Κ, κέντρο του ΑΒΓΔ.



Κ μέσο του ΔΒ

$K\left(\frac{x_\Delta+x_B}{2},\,\frac{y_\Delta+y_B}{2}\right)$

$K\left(\frac{2+1}{2},\,\frac{-3+4}{2}\right)$

$K\left(\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Β.

Β1 σημεία Α, Β, Γ, Σ για τα οποία ισχύει

$$2\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma B} - 3\vec{\Sigma \Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$
$$2\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma B} - 2\vec{\Sigma \Gamma} - \vec{\Sigma \Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$
$$2\vec{\Sigma A} - 2\vec{\Sigma \Gamma} + \vec{\Sigma B} - \vec{\Sigma \Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$
$$2(\vec{\Sigma A} - \vec{\Sigma \Gamma}) + \vec{\Sigma B} - \vec{\Sigma \Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$
$$2\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B} = \vec{0} \Leftrightarrow$$
$$\vec{\Gamma B} = 2\vec{A\Gamma}$$

άρα $\vec{\Gamma B} \parallel \vec{A\Gamma}$ και Γ κοινό σημείο } επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Β2 $\vec{\alpha} = (2,-1)$, $\vec{\beta} = (x,y)$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$, $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$

i) $|\vec{\beta}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2 = 5 \ (1)$$

$\vec{\beta} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow$
$$\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x - y = 0 \Leftrightarrow$$
$$y = 2x \ (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x^2 + (2x)^2 = 5 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 4x^2 = 5 \Leftrightarrow$$
$$5x^2 = 5 \Leftrightarrow$$
$$x^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$x = \pm 1$$

Επειδή το $\vec{\beta}$ έχει το πέρας του στο 1ο τεταρτημόριο $\boxed{x=1}$ δεκτή

$\boxed{y=2}$

Επομένως $\vec{\beta} = (1,2)$

ii) $\lambda = ;$ ώστε $\vec{\delta} \parallel \vec{\gamma}$

$\vec{\delta} = (\lambda^2, \lambda+1)$

$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

$$\vec{\gamma} = (2,-1) + 2\cdot(1,2) = (2,-1) + (2,4) = (4,3)$$
$$\vec{\gamma} = (4,3)$$

$$\vec{\delta} \parallel \vec{\gamma} \Leftrightarrow \det(\vec{\delta},\vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 64$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

- Αν $\lambda = 2$ τότε $\vec{\delta} = (4,3)$
- Αν $\lambda = -\frac{2}{3}$ τότε $\vec{\delta} = \left(\frac{4}{9}, \frac{1}{3}\right)$

$\boxed{B3}$ διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$

με $|\vec{a}|=2$

$|\vec{b}|=1$

$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$

i) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$

ii) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=$
$=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=$
$=4+1-2=3$

iii) $(\vec{a}+2\vec{b})^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4+4+4=12$

iv) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=$
$=4-2+1=3$

άρα $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{\Gamma 1}$ Απόδειξη σελ.60 σχολικού

$\boxed{\Gamma 2}$ i) Ορισμός σελ.31 σχολικού

ii) Ορισμός σελ.33 σχολικού

$\boxed{\Gamma 3}$ i) $\begin{cases} 8a+3b=53 \quad \cdot(5) \\ 9a-5b=1 \quad \cdot(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40a+\cancel{15b}=265 \\ 27a-\cancel{15b}=3 \quad (+) \end{cases}$

$67a=268 \Leftrightarrow \boxed{a=4}$

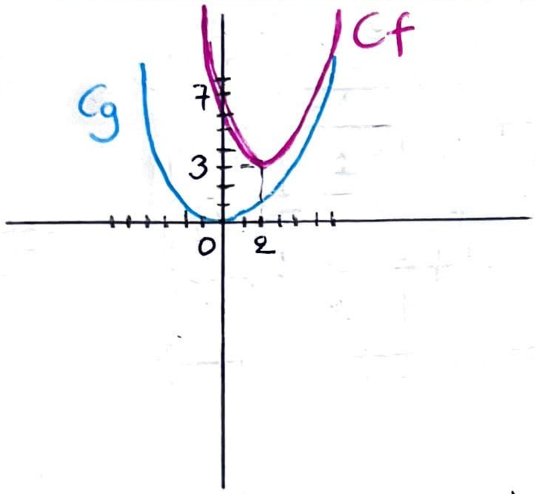
$8\cdot 4+3\cdot b=53 \Leftrightarrow 3b=53-32 \Leftrightarrow 3b=21 \Leftrightarrow \boxed{b=7}$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση $(a,b)=(4,7)$

ii) $f(x)=x^2-4x+7$
$f(x)=x^2-4x+4+3$
$f(x)=(x-2)^2+3$

iii) $g(x)=x^2$

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g αν τη μετατοπίσουμε οριζόντια κατά 2 μονάδες δεξιά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

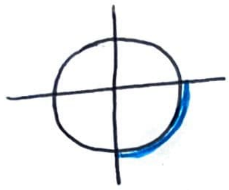


Γ4. i) λάθος ii) λάθος iii) λάθος iv) λάθος v) Σωστό.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Αν $εφω = -2$

$\frac{3\pi}{2} < ω < 2\pi$



$$συν^2ω = \frac{1}{εφ^2ω+1} = \frac{1}{(-2)^2+1} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

$$συν^2ω = \frac{1}{5} \Rightarrow συνω = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \xRightarrow{συνω>0} \boxed{συνω = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Rightarrow ημ^2ω + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow ημ^2ω = \frac{4}{5} \Rightarrow ημω = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

αφού $ημω < 0$

$$\boxed{ημω = -\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$εφω \cdot σφω = 1 \Rightarrow -2 \cdot σφω = 1 \Rightarrow \boxed{σφω = -\frac{1}{2}}$$

Δ2 Ν.Α.Ο.

$$\left(\frac{1}{συνx} + συνx\right)\left(\frac{1}{συνx} - συνx\right) = ημ^2x + εφ^2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{συν^2x} - συν^2x = ημ^2x + εφ^2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{συν^2x} = ημ^2x + συν^2x + εφ^2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{συν^2x} = 1 + εφ^2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{συν^2x} = \frac{συν^2x + ημ^2x}{συν^2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{συν^2x} = \frac{1}{συν^2x}$$ που ισχύει

$\boxed{\Delta 3}$ $f(x) = \dfrac{x^3 - (\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{3})x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu\pi}$.

$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow (\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$.

$\sigma\upsilon\nu\pi = -1$.

άρα $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$

i) πεδίο ορισμού

$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$A_f = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$

ii) f άρτια ή περιττή

για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3\cdot(-x)}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x^3 + 3x}{x^2 - 1} = \dfrac{-(x^3 - 3x)}{x^2 - 1} = -f(x)$

$f(-x) = -f(x)$

άρα f περιττή.

iii) $x^2 \leq \dfrac{f(999)}{f(-999)} x$

Επειδή η f περιττή $f(-999) = -f(999)$

άρα $x^2 \leq \dfrac{f(999)}{-f(999)} x \Leftrightarrow x^2 \leq -x \Leftrightarrow x^2 + x \leq 0$

μηδενίζω

$x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$x = 0$ ή $x = -1$.

x		-1		0	
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$

λύση της ανίσωσης $x \in [-1, 0]$