ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 27/4/2024

A4) 1) Σ 2) Λ 3) Λ 4) Σ 5) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1) Έστω $f(x) = x^3 - 6x^2 + 128 - 2\alpha = 0$, $x \in (0,8)$, $\alpha \in (48,64)$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

x	0		4		8
f'		$-$		$+$	
f		↘		↗	

$f((0,4]) \xrightarrow[f \searrow]{f \text{ συνεχής}} [f(4), \lim_{x\to 0^+} f(x)) = [96-2\alpha, 128-2\alpha)$

- $\alpha > 48 \iff -2\alpha < -96 \iff 96 - 2\alpha < 0$
- $\alpha < 64 \iff -2\alpha > -128 \iff 128 - 2\alpha > 0$

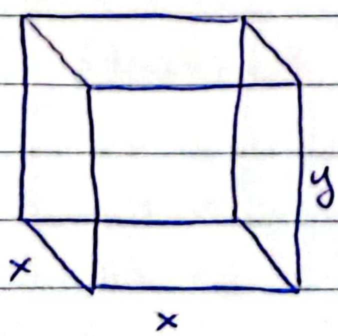
$\Big\}$ $0 \in f((0,4])$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα και $f \searrow$ στο $(0,4]$ άρα η ρίζα μοναδική

$f([4,8)) \xrightarrow[f \nearrow]{f \text{ συνεχής}} [f(4), \lim_{x\to 8} f(x)) = [96-2\alpha, 256-2\alpha)$

Ομοίως $0 \in f([4,8))$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα και $f \nearrow$ στο $[4,8)$ άρα η f έχει 1 ακριβώς ρίζα.

Τελικά η εξίσωση έχει 2 ακριβώς ρίζες

B2) i)



Έστω y το ύψος του κουτιού.

$E = x^2 + 4xy \iff x^2 + 4xy = 64 \iff y = \dfrac{64 - x^2}{4x}$

Πρέπει $x > 0$ και $y > 0 \iff 64 - x^2 > 0 \iff$
$x^2 < 64 \iff |x| < 8 \iff x < 8$. άρα $0 < x < 8$

$V(x) = x \cdot x \cdot y = x^2 \dfrac{64 - x^2}{4x} = \dfrac{64x - x^3}{4}$, $x \in (0,8)$

ii) $V'(x)=\frac{64-3x^2}{4}$, $V'(x)\geq 0 \iff 64-3x^2\geq 0 \iff x^2<\frac{64}{3} \iff$
$|x|<\frac{8}{\sqrt{3}}$

x	0		$\frac{8\sqrt{3}}{3}$		8
V'		$+$		$-$	
V		↗		↘	

άρα $x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ κ $y=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ώστε το κουτί να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα

iii) Έστω $M(x_0,y_0)$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη στο Μ είναι:

$(\varepsilon): y-V(x_0)=V'(x_0)(x-x_0) \overset{K\in(\varepsilon)}{\iff} \alpha-V(x_0)=V'(x_0)(4-x_0) \iff$

$\alpha-\frac{64x_0-x_0^3}{4}=\frac{64-3x_0^2}{4}(4-x_0) \iff 4\alpha-64x_0+x_0^3=(64-3x_0^2)(4-x_0)$

$\iff x_0^3-6x_0^2+128-2\alpha=0$, που από το Β1 έχει ακριβώς 2 ρίζες άρα υπάρχουν ακριβώς 2 εφαπτομένες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $f'(x)=\frac{x}{f(x)} \iff f'(x)f(x)=x \iff 2f'(x)f(x)=2x \iff (f^2(x))'=(x^2)' \iff$

$f^2(x)=x^2+c \xrightarrow{x=0} c=1$ άρα $f^2(x)=x^2+1 \iff |f(x)|=\sqrt{x^2+1}$

f συνεχής κ $f(x)\neq 0$, αφού $\sqrt{x^2+1}\neq 0$ άρα f διατηρεί πρόσημο

κ $f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0$ επομένως $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

Γ2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1)}=0$

άρα η $y=-x$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$f(x)>-x \iff \sqrt{x^2+1}+x>0$

Είναι $x^2+1>x^2 \iff \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2} \iff \sqrt{x^2+1}>|x|\geq -x \iff \sqrt{x^2+1}+x>0$.

Γ3) $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \,/\, εφx\in\mathbb{R}\}=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{εφ^2x+1}=\sqrt{\frac{1}{συν^2x}}\overset{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=}\frac{1}{συνx}$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ4) $J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} h(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}dx$

Θέτω $\eta\mu x=u \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x\,dx=du$

$x=\frac{\pi}{4}:\ u=\frac{\sqrt2}{2}$

$x=-\frac{\pi}{4}:\ u=-\frac{\sqrt2}{2}$

άρα $J=\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\sqrt2/2}\frac{1}{1-u^2}du=-\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\sqrt2/2}\frac{1}{u^2-1}du$

• $\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}=\frac{A(u+1)+B(u-1)}{(u-1)(u+1)}$ άρα

$1=A(u+1)+B(u-1)$

$u=1:\ A=\frac12$

$u=-1:\ B=-\frac12$

άρα $J=-\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\sqrt2/2}\left(\frac{\frac12}{u-1}-\frac{\frac12}{u+1}\right)du=$

$=-\left[\frac12\ln|u-1|-\frac12\ln|u+1|\right]_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{\sqrt2/2}=\ldots$

ii) $f(x)\geq 1 \Leftrightarrow -f(x)\leq -1 \Leftrightarrow 2-f(x)\leq 1$ κ' $h(x)\geq 1$ άρα

$h(x)\geq 1\geq 2-f(x)$ επομένως (ισχύει για $x=0$) (ισχύει για $x=0$)

$h(x)\geq 2-f(x)$ όπ. $h(x)=2-f(x) \Leftrightarrow x=0$

iii) Είναι $\left.\begin{array}{l} f(x)>0\\ h(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)+h(x)>0$ ...(1)

Αν $t(0)<t(1)$ τότε $\int_{t(0)}^{t(1)}(f(x)+h(x))dx>0$ άτοπο

Αν $t(0)>t(1)$ τότε $\int_{t(1)}^{t(0)}(f(x)+h(x))dx>0 \Leftrightarrow -\int_{t(0)}^{t(1)}(f(x)+h(x))dx>0 \Leftrightarrow$

$\int_{t(0)}^{t(1)}(f(x)+h(x))dx<0$ άτοπο άρα $t(0)=t(1)\xRightarrow{\Theta.\ Rolle} t'(\xi)=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) α) Για $x<0$ f συνεχής ως γινόμενο συνεχών

Για $x>0$ f συνεχής ως σύνθεση συνεχών

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^x = 0\cdot 1 = 0\\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0\\ &f(0)=0\end{aligned}\right\} f \text{ συνεχής στο } 0$$

Άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$

β) $E = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx = \int_{-1}^{0} |f(x)|dx + \int_{0}^{1} |f(x)|dx$

Για $x<0$: $f(x) = xe^x < 0$

Για $x>0 \Leftrightarrow x+1>1 \overset{\ln x}{\Leftrightarrow} \ln(x+1)>0$ ($\nearrow$)

Άρα $E = \int_{-1}^{0} -f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = -\int_{-1}^{0} xe^x dx + \int_{0}^{1} \ln(x+1)dx =$

$\left[-xe^x\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^x dx + \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 1\,dx = \ln 4 - \frac{2}{e} = k$

Δ2) Ισχύει $\ln x \le x-1$ $\forall\, x>0$ με την ισότητα μόνο για $x=1$

$x \to x^2+1$: $\ln(x^2+1) \le x^2$ η ισότητα μόνο για $x=0$ τότε

$\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)dx < \int_{0}^{1} x^2 dx \Leftrightarrow \int_{0}^{1} f(x^2)dx < \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}$

Δ3) Για $x<0$: $F'(x)=f(x)$, $F''(x)=f'(x)=xe^x+e^x=(x+1)e^x$

	-1		0
$-$		$+$	
$\cap$		$\cup$	

άρα F $\cup$ στο $[-1,0]$ ή F $\cap$ στο $(-\infty,-1]$

$F(x) \le x f(x)$, για $x=0$ ισχύει ως ισότητα

Για $x<0$: $F(x) < x f(x) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} > f(x)$

$[x,0]$ $\underset{F}{\text{ΘΜΤ}}$ $f(\xi) = \frac{F(0)-F(x)}{-x} = \frac{F(x)}{x}$, $x<\xi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(\xi) \Leftrightarrow$

$\frac{F(x)}{x} > f(x)$

Παρατηρήσεις

α)

Δ4) Για $x<0$ G συνεχής ως πηλίκο συνεχών

$$\lim_{x\to 0^-} G(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{F(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = G(0)$$

άρα G συνεχής στο $(-\infty, 0]$

$$G'(x) = \left(\frac{F(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)x - F(x)}{x^2} \geq 0$$ από Δ3, με την ισότητα μόνο για $x=0$

Άρα G $\uparrow$ στο $(-\infty, 0]$

β) $F(x^3) + x^3 F(-1) \geq 0 \overset{x\neq 0}{\iff} \frac{F(x^3)}{x^3} \leq -F(-1) \iff$

$G(x^3) \leq G(-1) \overset{G\uparrow}{\iff} x^3 \leq -1 \iff x \leq -1$ άρα $x=-1$

Αν $x=0$ τότε $F(0)+0 \geq 0$ ισχύει