Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 8/4/23

ΘΕΜΑ Α

A1) Σχολικό σελ. 133

A2) Σχολικό σελ. 216

A3) Σχολικό σελ. 73

A4) i) Λ ii) Λ iii) Λ iv) Λ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

$f'(x) = -2x f^2(x)$ (1)

B1) g συνεχής κ' παραγωγίσιμη ως πράξη συνεχών κ' παραγωγίσιμων, με

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = \frac{-f'(x) - 2x f^2(x)}{f^2(x)} \overset{(1)}{=} \frac{2x f^2(x) - 2x f^2(x)}{f^2(x)} = 0$$

άρα $g(x) = c$

B2) $g(x) = c \xrightarrow{\text{για } x=0} g(0) = c \Leftrightarrow \frac{1}{f(0)} - 0 = c \Leftrightarrow c = 1$ άρα $g(x) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2+1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

B3) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

x		0	
f'	$+$	0	$-$
f	↗		↘

ο.μ. $f(0) = 1$

B4) $$f''(x) = -\frac{2(x^2+1)^2 - 2x\,2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4} = -\frac{2(x^2+1)\left[x^2+1-4x^2\right]}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

x		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
f''	$+$		$-$		$+$
f	∪		∩		∪
		Σ.Κ		Σ.Κ.	

B5) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2+1}\,ημ(2023x)\right] = 0$, γιατί

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\,ημ2023x\right| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right|\left|ημ2023x\right| \le \left|\frac{x}{x^2+1}\right|$$ κ.λ.π.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ \frac{e}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$$

$\alpha<1 \Leftrightarrow 1-\alpha>0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha}>e^0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha}>1$

Γ1) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^x=e$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{e}{x}=e$, $f(1)=e$, f συνεχής στο 1

f συνεχής στο $[\alpha,1)$ ως εκθετική, f συνεχής στο $[1,e^{1-\alpha}]$ ως ρητή

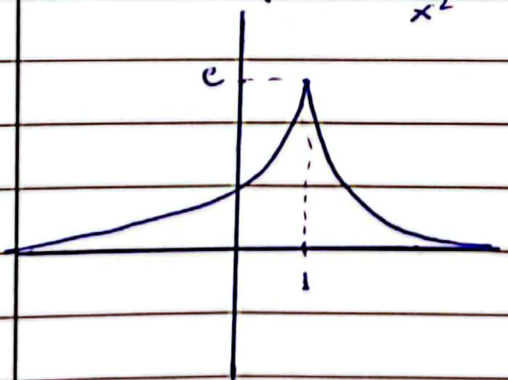
άρα f συνεχής στο $[\alpha, e^{1-\alpha}]$

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha)&=e^\alpha \\ f(e^{1-\alpha})&=\frac{e}{e^{1-\alpha}}=e^{1-1+\alpha}=e^\alpha \end{aligned}\right\} f(\alpha)=f(e^{1-\alpha})$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x-e}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x}{1}=e \\ &\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{e}{x}-e}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^+}-\frac{e}{x^2}=-e \end{aligned}\right\} f \text{ όχι παραγ. στο } 1$$

Γ2) Για $x<1$: $f'(x)=e^x>0$ άρα $f\uparrow$

Για $x\geq 1$: $f'(x)=-\frac{e}{x^2}<0$ άρα $f\downarrow$



Γ3) $\alpha<1$ και $e^{1-\alpha}>1$ άρα $A(\alpha,0)$ και $B(\alpha,e^\alpha)$

i) $\Delta(e^{1-\alpha},0)$ και $\Gamma(e^{1-\alpha},e^\alpha)$

$(AB\Gamma\Delta)=(AB)\cdot(A\Delta)=e^\alpha|x_\Delta-x_A|=e^\alpha(e^{1-\alpha}-\alpha)=e-\alpha e^\alpha$, $\alpha<1$

ii) $E'(\alpha)=-\alpha e^\alpha-e^\alpha=-e^\alpha(\alpha+1)$

$E'(\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow -e^{\alpha}(\alpha+1)\geq 0 \Leftrightarrow \alpha+1\leq 0 \Leftrightarrow \alpha\leq -1$

	$-\infty$	-1	1
E'	$+$	$-$	
E	$\nearrow$	$\searrow$	

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\alpha=-1$ κι η μέγιστη τιμή είναι το $E(-1)=e+\frac{1}{e}$

iii) $E((-\infty,-1]) \xrightarrow[E\,\nearrow]{E\ \text{συνεχής}} (\lim\limits_{\alpha\to-\infty}E(\alpha),\ E(-1)] = (e,\ e+\frac{1}{e}]$

$\lim\limits_{\alpha\to-\infty}E(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}(e-\alpha e^{\alpha}) = e+0 = e$, διότι

$\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\alpha e^{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{\alpha}{e^{-\alpha}} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{-e^{-\alpha}} = 0$

$E([-1,1)) \xrightarrow[E\,\searrow]{E\ \text{συνεχής}} (\lim\limits_{\alpha\to1}E(\alpha),\ E(-1)] = (0,\ e+\frac{1}{e}]$

- $\frac{e^2}{3}>0$ • Έστω $\frac{e^2}{3}<e+\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^2<3e+\frac{3}{e} \Leftrightarrow e^2-3e-\frac{3}{e}<0 \Leftrightarrow e(e-3)-\frac{3}{e}<0$ ισχύει
- Έστω $\frac{e^2}{3}>e \Leftrightarrow e^2>3e \Leftrightarrow e(e-3)>0$ άτοπο άρα $\frac{e^2}{3}<e$.

Επομένως
$\frac{e^2}{3}\in E([-1,1))$ άρα η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα κι επειδή $E\searrow$ στο $[-1,1)$ η ρίζα μοναδική
$\frac{e^2}{3}\notin E((-\infty,-1])$

iv) ΑΒΓΔ τετράγωνο άρα $(AB)=(A\Delta) \Leftrightarrow e^{\alpha}=e^{1-\alpha}-\alpha \Leftrightarrow$
$e^{\alpha}-e^{1-\alpha}+\alpha=0$
Έστω $g(\alpha)=e^{\alpha}-e^{1-\alpha}+\alpha$, $\alpha\in[0,1]$
g συνεχής ως πράξη συνεχών
$\left.\begin{array}{l} g(0)=1-e<0 \\ g(1)=e>0 \end{array}\right\}$ Bolzano ... κι $g'(\alpha)=e^{\alpha}+e^{1-\alpha}+1>0$
άρα $g\nearrow$ οπότε η ρίζα μοναδική

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $g'(x) = 2e^{x+1} - 2$

$g'(x) \geq 0 \iff e^{x+1} \geq 1 \iff e^{x+1} \geq e^{0} \overset{e^x}{\underset{\nearrow}{\iff}} x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$

x		-1	
g'	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε.	

$g(x) \geq g(-1) = 1$

Δ2) Έστω G αρχική της g με $G'(x) = g(x) \geq 1 > 0$ άρα $G \nearrow$ οπότε και 1-1

$\int_{f'(\alpha)}^{2\alpha e^{-f(\alpha)}} g(x)\,dx = 0 \iff \left[G(x)\right]_{f'(\alpha)}^{2\alpha e^{-f(\alpha)}} = 0 \iff G(2\alpha e^{-f(\alpha)}) - G(f'(\alpha)) = 0 \iff$

$G(2\alpha e^{-f(\alpha)}) = G(f'(\alpha)) \overset{G}{\underset{1-1}{\iff}} 2\alpha e^{-f(\alpha)} = f'(\alpha)$

Είναι: $2xe^{-f(x)} = f'(x) \iff e^{f(x)}f'(x) = 2x \iff \left(e^{f(x)}\right)' = (x^2)' \iff$

$e^{f(x)} = x^2 + c$
Για $x=0 \Rightarrow c=1$ $\Big\} \Rightarrow e^{f(x)} = x^2+1 \iff \boxed{f(x) = \ln(x^2+1)}$

Δ3) $\lim_{x\to+\infty}\left[f^2(x) - f^3(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right] = \ell$

Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) \overset{x^2+1=u}{\underset{x\to+\infty,\ u\to+\infty}{=}} \lim_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$

Θέτω $\frac{1}{f(x)} = u$, $x\to+\infty$, $f(x)\to+\infty$ άρα $u\to 0$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{u}$ άρα

$\ell = \lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{\eta\mu u}{u^3}\right) = \lim_{u\to 0} \frac{u-\eta\mu u}{u^3} \overset{0/0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{u\to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu u}{3u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{6u} =$

$= \frac{1}{6}$

γ1) $h(x) = e^x - x + f(x) = e^x - x + \ln(x^2+1)$

$h'(x) = e^x - 1 + \dfrac{2x}{x^2+1}$, $h'(0) = 0$

Για $x>0$: $\left\{\begin{array}{l} e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \\ \dfrac{2x}{x^2+1} > 0 \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} h'(x) > 0$

Για $x<0$: $\left\{\begin{array}{l} e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \\ \dfrac{2x}{x^2+1} < 0 \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} h'(x) < 0$

x		0	
h'	$-$		$+$
h	$\searrow$		$\nearrow$

ο.ε. $h(0) = 1$ άρα $h(x) \geq 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{h(x) - \sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} \dfrac{1}{h(x) - \sigma\upsilon\nu x} = +\infty$, γιατί

• $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} \underset{\substack{x\to 0 \\ u\to +\infty}}{\overset{\frac{1}{x^2}=u}{=\!=}} \lim\limits_{u\to +\infty} e^u = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} (h(x) - \sigma\upsilon\nu x) = 0$ και $h(x) \geq 1 \geq \sigma\upsilon\nu x$ άρα $h(x) > \sigma\upsilon\nu x$
κοντά στο 0 επομένως $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{h(x) - \sigma\upsilon\nu x} = +\infty$