ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 7/12/24

Παρατηρήσεις

A4) i) Λ ii) Λ iii) Σ iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1) $f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

		-1		1	
f'	$-$		$+$		$-$
f	↘		↗		↘

B2) $f''(x) = \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2-(1-x^2)\left((x^2+1)^2\right)'}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} =$

$\frac{2x(x^2+1)\left[-x^2-1-2+2x^2\right]}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4}$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4} \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) \geq 0$

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$-$		$+$		$-$		$+$
f'	↘		↗		↘		↗

B3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ άρα η $y=0$ 〃 $-\infty$

B4) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Γ}}$

Γ1) $f(-1) = -1$
$f(3) = -27+27 = 0$ $\Big\} \Rightarrow f(-1) \neq f(3)$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
$f(0) = 0$ $\Big\} \to$ f συνεχής στο 0

f συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών
f συνεχής στο $(0,3]$ ως πολυωνυμική $\Big\}$ f συνεχής στο $[-1,3]$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt[5]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-(-x)^{4/5}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{5}}}{(-x)} =$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(-x)^{1-\frac{4}{5}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(-x)^{\frac{1}{5}}} = +\infty$ άρα f όχι παραγωγ. στο 0.

Γ2) Για $x>0$: $f'(x) = -3x^2+6x = 3x(-x+2)$

	0		2	
f'		+		−
f		↗		↘

Για $x<0$: $f'(x) = -\left((-x)^{\frac{4}{5}}\right)' = +\frac{4}{5}(-x)^{-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}(-x)^{\frac{4}{5}-1}(-x)' = \frac{4}{5}(-x)^{-\frac{1}{5}} =$

$= \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{-x}} > 0$ άρα f ↑ στο $(-\infty, 0]$

Γ3) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2-\alpha x^2+\beta=0$

Έστω $h(x)=-x^3+3x^2-\alpha x^2+\beta$, $x>0$, $\alpha>3$

Υποθέτουμε ότι η h έχει 3 ρίζες τις ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ και

$h(\rho_1)=h(\rho_2)=h(\rho_3)$

Rolle Rolle

$h'(\xi_1)=0$ $h'(\xi_2)=0$

Rolle

$h''(\xi)=0$ άτοπο

$h'(x)=-3x^2+6x-2\alpha x$

$h''(x)=-6x+6-2\alpha$

$h''(x)=0 \Leftrightarrow -6x+6-2\alpha=0 \Leftrightarrow$

$6x=6-2\alpha \Leftrightarrow x=1-\frac{1}{3}\alpha$ αδύνατο

γιατί $\alpha>3 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3}>1 \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha}{3}<0$

άρα η h δεν έχει 3 ρίζες, έχει 2 το πολύ άρα C_f και C_g έχουν 2 το πολύ κοινά σημεία.

Γ4) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^4}dx=\int_1^2 \frac{-x^3+3x^2}{x^4}dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\left[-\ln x-\frac{3}{x}\right]_1^2=-\ln 2-\frac{3}{2}+3=$

$=-\ln 2+\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Δ}}$

$f^2(x)+2f(x)\ln x=3\ln^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)\ln x+\ln^2 x=4\ln^2 x \Leftrightarrow$

$(f(x)+\ln x)^2=4\ln^2 x \Leftrightarrow |f(x)+\ln x|=2|\ln x|$

Έστω $g(x)=f(x)+\ln x$ άρα $|g(x)|=2|\ln x|$, g συνεχής,

$g(x)=0 \Leftrightarrow |g(x)|=0 \Leftrightarrow 2|\ln x|=0 \Leftrightarrow x=1$ άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$

$g(e)=f(e)+\ln e=1+1=2$ άρα $g(x)>0\ \forall x>1$ και $\ln x>0\ \forall x>1$

άρα $g(x)=2\ln x \Leftrightarrow f(x)+\ln x=2\ln x \Leftrightarrow f(x)=\ln x\ \forall x>1$

$g\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)+\ln\frac{1}{e}=-1-\ln e=-2<0\ \forall x\in(0,1)$ άρα $g(x)<0$ και

$\ln x<0\ \forall x\in(0,1)$ άρα $-g(x)=-2\ln x \Leftrightarrow g(x)=2\ln x \Leftrightarrow$

$f(x)+\ln x=2\ln x \Leftrightarrow g(x)=\ln x\ \forall x\in(0,1)$ και επειδή $g(1)=0$

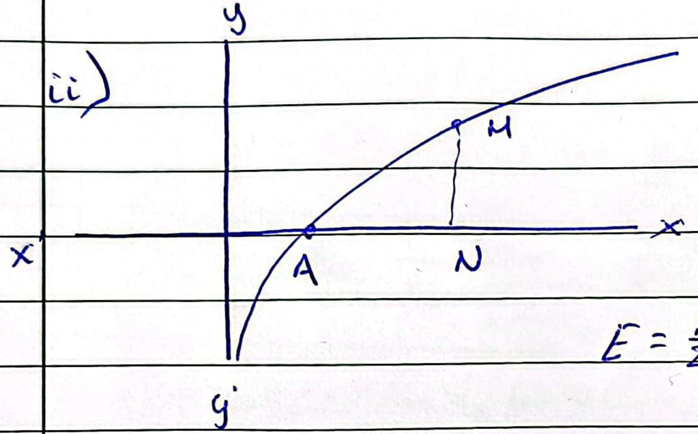
$g(x)=\ln x\ \forall x>0$

Δ2) i) Έστω $A(\alpha, \ln\alpha)$ $\quad (0,-1)\in \varepsilon\varphi$

Η εφαπτομένη της C_f στο Α: $y-\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$

$-1-\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(0-\alpha) \Leftrightarrow -1-\ln\alpha = -1 \Leftrightarrow -\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ άρα $A(1,0)$

ii)



Έστω $M(x, \ln x)$

$x'(t) = 0{,}5$

$x(t_0) = 2$

$E = \frac{1}{2}|AN||MN| = \frac{1}{2}(x-1)\cdot \ln x$

$E(t) = \frac{1}{2}(x(t)-1)\cdot \ln x(t)$

$E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)\ln x(t) + \frac{1}{2}(x(t)-1)\frac{x'(t)}{x(t)}$

$t=t_0: \ E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0)\ln x(t_0) + \frac{1}{2}(x(t_0)-1)\frac{x'(t_0)}{x(t_0)} =$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}(2-1)\frac{\frac{1}{2}}{2} =$

$\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{8} = \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}$ τ.μ.

Δ3) $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$

Δ4) i) $g(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, \ x \geq 1$

$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot x - \sqrt{\ln x}}{x^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} - \sqrt{\ln x}}{x^2} = \frac{1-2\ln x}{\sqrt{\ln x}\cdot x^2}$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$

Παρατηρήσεις

x	1		$\sqrt{e}$	
g'		$+$		$-$
g		$\nearrow$		$\searrow$

ii) Η εφαπτομένη της C_g στο $(x_0, g(x_0))$ είναι

$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \quad (O \in \varepsilon\varphi)$

$-g(x_0) = -x_0 g'(x_0) \Leftrightarrow g(x_0) = x_0 g'(x_0) \Leftrightarrow$

$\dfrac{\sqrt{\ln x_0}}{x_0} = x_0 \dfrac{1 - 2\ln x_0}{2x_0^2 \sqrt{\ln x_0}} \overset{\cdot x_0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\ln x_0} = \dfrac{1 - 2\ln x_0}{2\sqrt{\ln x_0}} \Leftrightarrow$

$2\ln x_0 = 1 - 2\ln x_0 \Leftrightarrow 4\ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{1}{4}}$

$1 < e^{\frac{1}{4}} < e \Leftrightarrow 1 < e < e^4$ ισχύει