\
ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
3/1/2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ

Α2. ΘΕΩΡΙΑ

Α3. ΘΕΩΡΙΑ

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = -\frac{2}{x} < 0$ άρα $f \searrow$ στο $(0,+\infty)$ οπότε 1-1

• f συνεχής κ' $\searrow$ στο $(0,+\infty) \rightarrow f(A) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)) = \mathbb{R}$

Για $y \in \mathbb{R}$ κ' $x>0$ θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\ln x = y - 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1-y}{2} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{1-y}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1-y}{2}}$

άρα $f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

Β2. Θεωρώ $h(x) = f(x) - 1 + \frac{2}{x} = 1 - 2\ln x + 1 + \frac{2}{x} = -2\ln x + \frac{2}{x}$

h συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συναρτήσεων

$h(1) = 2 > 0$, $h(e) = -2 + \frac{2}{e} = \frac{-2e+2}{e} = -\frac{2}{e}(e-1) < 0$

άρα $h(1)h(e) < 0$ Θ. Bolzano ..

Β3. $\begin{cases} f'(x_0) = -2 \\ f(x_0) = -2x_0 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{x_0} = -2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \\ f(1) = -2 + 3 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ ισχύει} \end{cases}$

άρα $y = -2x + 3$ (εφ) της C_f στο $x_0 = 1$

Β4. $A_g = \mathbb{R}^* \neq A_f = (0,+\infty)$ άρα $f \neq g$

Για $x \in (0,+\infty)$: $g(x) = \ln e - \ln x^2 = 1 - 2\ln x = f(x)$

άρα $f = g$ όταν $x > 0$ (1)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f^2(x) - 8f(x) = x^2 - 7 \Leftrightarrow f^2(x) - 8f(x) + 16 = x^2 + 9$

$\Leftrightarrow (f(x) - 4)^2 = x^2 + 9$ Θεωρώ $K(x) = f(x) - 4$

οπότε $K^2(x) = x^2 + 9$

• $x^2 + 9 \neq 0$ άρα $K^2(x) \neq 0 \Rightarrow K(x) \neq 0$ επειδή K συνεχής στο $\mathbb{R}$

τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε $K > 0$ ή $K < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$K^2(x) = x^2 + 9 \Leftrightarrow |K(x)| = \sqrt{x^2+9}$$

άρα $K(x) = \sqrt{x^2+9}$ ή $K(x) = -\sqrt{x^2+9}$

$f(x) = 4 + \sqrt{x^2+9}$ ή $f(x) = 4 - \sqrt{x^2+9}$, $x \in \mathbb{R}$

• Επειδή $f(\alpha) f(\beta) < 0$ τότε η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα $f(x) = 4 - \sqrt{x^2+9}$, $x \in \mathbb{R}$ αφού $4 + \sqrt{x^2+9} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Γ2. Για $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4 - \sqrt{x^2+9}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4}{x} + \frac{x}{x}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} \right) = 0 + 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to-\infty} \left(4 - \sqrt{x^2+9} - x\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(4-x)^2 - (x^2+9)}{(4-x) + \sqrt{x^2+9}} = \dots = \lim_{x\to-\infty} \frac{-8 + \frac{7}{x}}{\frac{4}{x} - 1 - \sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = 4 = \beta$$

άρα $(\varepsilon_1): y = x + 4$ πλάγια ασύμ. στο $-\infty$

Γ3. Έστω, $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

$(\varepsilon_2): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$\Gamma(-1,3) \in (\varepsilon_2) \Rightarrow 3 - f(x_0) = f'(x_0)(-1 - x_0)$

$\Leftrightarrow -1 + \sqrt{x_0^2+9} = \dfrac{x_0^2 + x_0}{\sqrt{x_0^2+9}} \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+9} = 9 - x_0$ πρέπει $x_0 \leq 9$

$\Leftrightarrow 18x_0 = 72 \Leftrightarrow x_0 = 4$

άρα $(\varepsilon_2): y = -\frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$

$2^x - 2x - 10 + (4 - f(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$2^x - 2x - 10 + (\cancel{4} - \cancel{4} + \sqrt{x^2+9})^2 = 0 \Leftrightarrow$

$2^x - 2x - 10 + x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$2^x + x^2 - 2x - 1 = 0$

Θεωρώ, $\Lambda(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

$\Lambda'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$

$\Lambda''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Έστω, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ με $\Lambda(\rho_1) = \Lambda(\rho_2) = \Lambda(\rho_3) = 0$

ΘR ΘR

$\Lambda'(x_1) = 0 = \Lambda'(x_2)$

ΘR

$\Lambda''(x_0) = 0$

$\Lambda''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2^{x_0} \ln^2 2 + 2 = 0$ ΑΤΟΠΟ

Άρα η εξίσωση $\Lambda(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{\Delta 1}$ f παρ/μη στο $[0,1]$ απο ΘΜΤ $\exists\, x_0 \in (0,1): f'(x_0) = f(1) - f(0)$

Επειδη, $f(0) < f'(x) \le f(1)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ τοτε:

$x = x_0$: $f(0) < f'(x_0) \le f(1) \Leftrightarrow$

$f(0) < f(1) - f(0) \le f(1) \Leftrightarrow f(0) \ge 0$

Εχουμε, $f'(x) > f(0) \ge 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ αρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$\boxed{\Delta 2}$ α) f παρ/μη στο $[1,2] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(x_1) = f(2) - f(1)$

f παρ/μη στο $[2,3] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(x_2) = f(3) - f(2)$

Εχουσιν Α, Β, Γ συνευθειακα $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = \dfrac{f(3) - f(2)}{3-2}$

$\Leftrightarrow f'(x_1) = f'(x_2)$

β). $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x \to 0} e^{x \ln x} \overset{*}{=} \lim\limits_{u \to 0} e^u = 1$ $\quad *$ Θετουμε $u = x\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dots = 0$

• $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{e^x f'(x) - e^{\xi} f'(\xi)}{x - \xi} = \left(e^x \cdot f'(x)\right)'(\xi)$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

• $\left(e^x \cdot f'(x)\right)'(\xi) = f'(x_1)\, e^{\xi} \Leftrightarrow \left(e^x \cdot f'(x)\right)'(\xi) - f'(x_1) e^{\xi} = 0$

Θεωρω $h(x) = e^x f'(x) - e^x f'(x_1)$

• $h(x_1) = e^{x_1} f'(x_1) - e^{x_1} f'(x_1) = 0$

$h(x_2) = e^{x_2} f'(x_2) - e^{x_2} f'(x_2) = 0$

$h(x_1) = h(x_2)$

Θ Rolle ...

$F'(x) = f(x)$ άρα $F' \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

F ΠΑΡ/ΜΗ ΣΤΟ $[x, x+1]$ από ΘΜΤ $\exists\, \kappa \in (x, x+1): f(\kappa) = F(x+1) - F(x)$

F ΠΑΡ/ΜΗ ΣΤΟ $[x+1, x+2]$ από ΘΜΤ $\exists\, \lambda \in (x+1, x+2): f(\lambda) = F(x+2) - F(x+1)$

$\kappa < \lambda \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} F(x+1) - F(x) < F(x+2) - F(x+1) \Leftrightarrow$

$2F(x+1) - F(x) - F(x+2) < 0$ άρα $2F(x+1) = F(x) + F(x+2)$ ΑΔΥΝΑΤΗ

$\boxed{\Delta 4}$ $\ln x\,(1 - f(x)) = f^2(x) - 3f(x) + 2$

- $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$, $\dfrac{3-1}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \ln x\,(1 - f(x)) = (f(x) - 1)(f(x) - 2)$

$\Leftrightarrow \ln x\,(1 - f(x)) + (1 - f(x))(f(x) - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - f(x))(\ln x + f(x) - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - f(x) = 0$ ή $\ln x + f(x) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$

Θεωρούμε $W(x) = \ln x + f(x) - 2,\ x \in [1, e]$

$\begin{cases} W(1) = f(1) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ W(e) = 1 + f(e) - 2 = f(e) - 1 = f(e) - f(1) \overset{*}{>} 0 \end{cases}$

$*$ $1 < e \overset{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(1) < f(e)$

Άρα,

$W(1)W(e) < 0$ από Θ. Bolzano ...

- $W'(x) = \dfrac{1}{x} + f'(x) > 0$ άρα $W \uparrow$ στο $(1, e)$ οπότε κ' 1-1