Λύσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 3-1-2025

ΘΕΜΑ 1ο : Α 1) ΛΑΘΟΣ 3) ΛΑΘΟΣ 5) ΣΩΣΤΟ

2) ΛΑΘΟΣ 4) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο

1. $A_f=(0,+\infty)$, $A_g=\mathbb{R}$

$A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, \underbrace{e^x+1>0}_{\text{ισχύει}}\}=\mathbb{R}$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=-\ln(e^x+1)$ (4μ)

2. $h(x)=-\ln(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

$h'(x)=-\dfrac{e^x}{e^x+1}<0 \Rightarrow h\downarrow \Rightarrow h$ "1-1" $\Rightarrow$ υπάρχει η h^{-1}

έστω $h(x)=y \Leftrightarrow -\ln(e^x+1)=y \Leftrightarrow \ln(e^x+1)=-y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x+1=e^{-y} \Leftrightarrow e^x=e^{-y}-1 \Leftrightarrow x=\ln(e^{-y}-1)$ $\Rightarrow$

$h(x)=y \Leftrightarrow x=h^{-1}(y)$

$h^{-1}(y)=\ln(e^{-y}-1)=\ln\left(\dfrac{1}{e^y}-1\right)=\ln\dfrac{1-e^y}{e^y}=\ln(1-e^y)-y$.

$A_{h^{-1}}=h(A)$

$A_h=(-\infty,+\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{h\downarrow} h(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x), \lim\limits_{x\to-\infty}h(x)\right)=(-\infty,0)$

οπότε $A_{h^{-1}}=(-\infty,0)$. (8μ)

3. $\phi(x) = \ln(1-e^x) - x \ , \ x<0$

Α τρόπος:

Αφού $\phi(x) = h^{-1}(x)$ το σύνολο τιμών της ϕ είναι ίδιο με το σύνολο τιμών της h^{-1} οπότε συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της h: $\phi(A) = A_h = \mathbb{R}$.

Β τρόπος:

$$\phi'(x) = \frac{-e^x}{1-e^x} - 1 = \frac{-e^x - 1 + e^x}{1-e^x} = \frac{-1}{1-e^x} < 0$$

Άρα $\phi \downarrow$

$$A_\phi = (-\infty, 0) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{\phi \downarrow} \phi(A) = \left(\lim_{x\to 0^-} \phi(x), \lim_{x\to -\infty} \phi(x)\right)$$

$$= (-\infty, +\infty)$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \phi(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\ln(1-e^x) - x\right) = -\infty - 0 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \phi(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\ln(1-e^x) - x\right) = \ln 1 + \infty = +\infty$

Ασύμπτωτες:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \phi(x) = -\infty$ οπότε $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\phi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{\ln(1-e^x)}{x} - 1\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(1-e^x) - 1\right)$

$$= 0 \cdot \overset{\to 0}{\cancel{\ln 1}} - 1 = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to -\infty} (\phi(x) - \lambda x) \overset{\lambda = -1}{=\!=} \lim_{x\to -\infty} \ln(1-e^x) = \ln 1 = 0 = \beta$$

οπότε η $y = -x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

(8μ)

4. $\int_0^1 \left(\frac{g^2(x)}{g(2x)-1}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}}\right)dx =$

$= -\int_0^1 \left(\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}}\right)dx = -\int_0^1 \left(1+2e^{-x}+e^{-2x}\right)dx =$

$= -\left[x-2e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = -1+\frac{2}{e}+\frac{1}{2e^2}+0-2-\frac{1}{2}$ (5μ)

$= \frac{2}{e}+\frac{1}{2e^2}-\frac{7}{2}$

ΘΕΜΑ 3ο

1. $g(x)=x\cdot \ln x+2,\ x>0$

$g'(x)=\ln x+1$

Έστω $g'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η $g \searrow (0,e^{-1}]$ και $g \nearrow [e^{-1},+\infty)$

Α τρόπος $\begin{cases} \text{Η } g \text{ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για } x=e^{-1}: g(x)\geq g(e^{-1}) \\ \Leftrightarrow g(x)\geq e^{-1}\cdot \ln e^{-1}+2 \Leftrightarrow g(x)\geq -e^{-1}+2 \end{cases}$

Β τρόπος $\left.\begin{cases} x\geq e^{-1} \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)\geq g(e^{-1})=-e^{-1}+2 \\ x\leq e^{-1} \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)\geq g(e^{-1})=-e^{-1}+2 \end{cases}\right\} g(x)\geq -e^{-1}+2$

(5μ)

2. • $f(0)=-1$, $f(1)=1$ άρα $f(0)f(1)<0$ και f συνεχής στο $[0,1]$ από Θ Bolzano $\exists\, x_1\in(0,1): f(x_1)=0$

• $f(1)=1$, $f(3)=3e+3-e^3<0$ άρα $f(1)f(3)<0$ και f συνεχής στο $[1,3]$ από Θ Bolzano $\exists\, x_2\in(1,3): f(x_2)=0$

• Έστω ότι η f παρουσιάζει 3 ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ με $f(\rho_1)=0=f(\rho_2)=0=f(\rho_3)$ από διαδοχικά θεωρήματα Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ $\exists\, \xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ όπου $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ Άτοπο αφού η $f'(x)=e+1-e^x$

έχει μοναδική ρίζα.
Συνεπώς η f παρουσιάζει ακριβώς 2 ρίζες.

(7μ)

3. Απο υπόθεση $x'(t) = 1/3$

όταν εφαπτομένη // $y = 21x + 2025$ ισχύει

$g'(x_0) = 21 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 = 21 \Leftrightarrow \ln x_0 = 20 \Leftrightarrow x_0 = e^{20}$.

Το ζητούμενο είναι $y'(t_0)$ όπου για $t = t_0$ το $x(t_0) = e^{20}$.

$y(t) = x(t)\ln x(t) + 2$ έτσι $y'(t) = x'(t)\ln x(t) + \frac{x(t)}{x(t)} \cdot x'(t)$

$\xRightarrow{t=t_0} y'(t_0) = \frac{1}{3}(\ln e^{20} + 1) = \frac{21}{3} = 7.$ (6μ)

4. $(AB) = |y_B - y_A|$ αφού τα σημεία έχουν την ίδια τετμημένη
$= |x\ln x - (e+1)x + e^x + 2|$

Θεωρούμε $h(x) = x\ln x - (e+1)x + e^x + 2$, $x > 0$

$h'(x) = \ln x + \cancel{1} - e - \cancel{1} + e^x$ παρατηρούμε $h'(1) = 0$

$h''(x) = \frac{1}{x} + e^x > 0 \Rightarrow h'(x) \uparrow$.

• Για $x \geq 1 \Leftrightarrow h'(x) \geq h'(1) = 0$

Για $x < 1 \Leftrightarrow h'(x) < h'(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

οπότε $h(x) \geq h(1) = +1$.

Άρα η ελάχιστη απόσταση του AB είναι 1.

(7μ)

ΘΕΜΑ 4º

1. $f(x)=2x\ln x-x^2,\ x>0$

$f'(x)=2\ln x+\frac{2x}{x}-2x=2\ln x+2-2x=2(\underbrace{\ln x+1-x}_{})$

↳ γνωστή ανισότητα: $\ln x-x+1\le 0$

ή $f''(x)=2\left(\frac{1}{x}-1\right)=2\,\frac{1-x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f'		↗		↘	

άρα $f'(x)\le f'(1)=0$ και η ισότητα ισχύει για $x=1$

οπότε $f\searrow$

$A=(0,+\infty)\xrightarrow[\text{συνεχής}]{f\searrow} f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=(-\infty,0)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x\ln x-x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(2\cancel{\frac{\ln x}{x}}^{\to 0}-1\right)\right]=-\infty$

$\triangleright\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\ \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\cancel{2x\ln x}^{\to 0}-x^2)=0$

$\triangleright\ \lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\ \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

$g(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}$ πρέπει $\begin{cases}x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge1\\ \text{και}\\ 2-x\ge0\Leftrightarrow x\le2\end{cases}\Big\}\ A_g=[1,2]$

$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}>0\Rightarrow g\nearrow$

$A=[1,2]\xrightarrow[\text{συνεχής}]{g\nearrow} g(A)=[g(1),g(2)]=[-1,1]$ (6μ)

2. Α) Ισχύει $f(e) < \frac{f(1)+f(e)}{2} < f(1)$ ($f \downarrow$)

Από ΘΕΤ. $\exists\, x_0 \in (1,e)$: $f(x_0) = \frac{f(1)+f(e)}{2}$

Το x_0 μοναδικό αφού η $f \downarrow$. (4μ)

Β) Από ΘΜΤ στο $[1, x_0]$ $\exists\, \xi_1 \in (1, x_0)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0 - 1}$

$$= \frac{\frac{f(1)+f(e)}{2} - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{\frac{f(e)-f(1)}{2}}{x_0 - 1} = \frac{f(e)-f(1)}{2(x_0-1)}$$

Από ΘΜΤ στο $[x_0, e]$ $\exists\, \xi_2 \in (x_0, e)$: $f'(\xi_2) = \frac{f(e)-f(x_0)}{e - x_0}$

$$= \frac{f(e) - \frac{f(1)+f(e)}{2}}{e - x_0} = \frac{\frac{f(e)-f(1)}{2}}{e-x_0} = \frac{f(e)-f(1)}{2(e-x_0)}$$

οπότε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2(x_0-1)}{f(e)-f(1)} + \frac{2(e-x_0)}{f(e)-f(1)} =$

$$= \frac{2(\cancel{x_0}-1+e-\cancel{x_0})}{2e-e^2+1} = \frac{2(e-1)}{1+2e-e^2} \quad (6μ)$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-k^2(x)} - \sqrt{2k^2(x)-1}}{f(x)\cdot k(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\sqrt{1-k^2(x)} - \sqrt{2k^2(x)-1}}{\sqrt{k^2(x)}}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-k^2(x)}{k^2(x)}} - \sqrt{\frac{2k^2(x)-1}{k^2(x)}}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{k^2(x)} - 1} - \sqrt{2 - \frac{1}{k^2(x)}}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{f(x)} \cdot g\left(\frac{1}{k^2(x)}\right)\right]$$

$g(A) = [-1, 1]$: $-1 \le g(x) \le 1$ οπότε $-1 \le g\left(\frac{1}{k^2(x)}\right) \le 1$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$\bullet \; \frac{1}{f(x)} < 0 \xRightarrow[f(A)=(-\infty,0)]{} \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)} g\left(\frac{1}{k^2(x)}\right) \leq \frac{-1}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{f(x)} = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{f(x)} g\left(\frac{1}{k^2(x)}\right)\right] = 0.$ (4μ)

4. Θεωρούμε $h(x) = 2k(3)f(x) + \frac{k(2)+k(4)}{x}$ με $x>0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ ($k(x)>0$ από δεδομένα $k:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$)

οπότε $\exists\, x_1>0: h(x_1)<0$

• $h(1) = 2k(3)(-1) + k(2) + k(4)$
$= k(2) + k(4) - 2k(3) > 0$

Από ΘΜΤ στο $[2,3]$ $\exists\, x_1 \in (2,3): k'(x_1) = \frac{k(3)-k(2)}{3-2}$

-//- -//- $[3,4]$ $\exists\, x_2 \in (3,4): k'(x_2) = \frac{k(4)-k(3)}{4-3}$

$x_1 < x_2 \xLeftrightarrow[(k''(x)>0)]{k' \nearrow} k'(x_1) < k'(x_2) \Leftrightarrow k(3)-k(2) < k(4)-k(3)$

$\Leftrightarrow -2k(3)+k(2)+k(4) > 0 \Leftrightarrow h(1)>0$

• Η h συνεχής στο $[1,x_1]$ ως πράξεις συνεχών.
$h(1)\cdot h(x_1) < 0$ οπότε από Θ Bolzano $\exists\, \xi \in (1,x_1)$:
$h(\xi)=0$.

$h'(x) = 2k(3)\cdot f'(x) - \frac{k(2)+k(4)}{x^2} < 0$

αφού $k(x) > 0$ και $f'(x) < 0$

άρα η $h(x)$ ↓ οπότε η ρίζα της είναι μοναδική.

(5/4)