28/07/2023

Διαγώνισμα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

(A1) Φυλλάδιο Κόκκινο, σελίδα 103
(A2) Φυλλάδιο Κόκκινο, σελίδα 54
(A3) Φυλλάδιο Κόκκινο, σελίδα 115
(A4)
1) Λ
2) Λ
3) Σ
4) Σ
5) Σ

Θέμα Β

(B1) $A_f = [0,14]$
$f(A) = [-1,6]$

(B2) $f \nearrow$ στο $[0,3]$ κ΄ στο $[6,8]$ κ΄ στο $[9,11]$ κ΄ στο $[13,14]$
$f \searrow$ στο $[3,4]$ κ΄ στο $(4,6]$ κ΄ στο $[8,9]$ κ΄ στο $[11,13]$
Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=-1$
Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=8$, το $f(8)=6$

(B3) 1) $\lim_{x\to 4} f(x)$ δεν υπάρχει διότι $\lim_{x\to 4^-} f(x)=0$
$\lim_{x\to 4^+} f(x)=2$

2) $\lim_{x\to 6} f(x)=0$

3) Αφού $\lim_{x\to 6} f(x)=0$ με $f(x)>0$ κοντά στο 6 τότε $\lim_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

4) Αφου $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ με $f(x) < 0$ για $x<1$ κοντα στο 1
και $f(x) > 0$ για $x>1$ κοντα στο 1

τοτε $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Αρα το $\lim_{x\to 1} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει

5) Αφου $\lim_{x\to 8} f(x) = 6$ με $f(x) < 6$ κοντά στο 8 τοτε

$\lim_{x\to 8} (6-f(x)) = 0$ με $6-f(x) > 0$ κοντά στο 8

Μορφή ορίου

Οπότε $\lim_{x\to 8} \frac{x-12}{6-f(x)} = \lim_{x\to 8} \frac{1}{6-f(x)} \cdot (x-12) = (+\infty)\cdot(-4) = -\infty$

B4 Για $x_0 = 4$ ισχύει $f(4) = 0$ και $\lim_{x\to 4} f(x)$ δεν υπάρχει διοτι
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$ αρα f οχι συνεχής στο $x_0 = 4$

Για $x_0 = 9$ ισχύει $\lim_{x\to 9} f(x) = 4$ όμως $f(9) = 2$ οποτε

f όχι συνεχής στο $x_0 = 9$

Θέμα Γ

Γ1 Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1)

$$x_1 < x_2 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 1+e^{x_1} < 1+e^{x_2} \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln(1+e^{x_1}) < \ln(1+e^{x_2}) \quad (2)$$

Απο (1) + (2) $\Rightarrow x_1 + \ln(1+e^{x_1}) < x_2 + \ln(1+e^{x_2})$
$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

(Γ2) Αφού f συνεχής στο $[-1,0]$ ως πράξεις συνεχών

και $f(-1) = -1 + \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) = -1 + \ln\frac{e+1}{e} =$

$$= -1 + \ln(e+1) - \ln e = -2 + \ln(e+1) =$$

$$= \ln\frac{1}{e^2} + \ln(e+1) = \ln\frac{e+1}{e^2} < 0$$

(διότι $\frac{e+1}{e^2} < 1$ οπότε $\ln\left(\frac{e+1}{e^2}\right) < 0$)

και $f(0) = \ln 2 > 0$

(διότι $2 > 1$ οπότε $\ln 2 > 0$)

άρα $f(-1)\cdot f(0) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,0)$ ώστε $f(x_0)=0$ και αφού $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε το x_0 είναι μοναδικό.

(Γ3) Αφού $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, τότε f "1-1" στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται

Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = x + \ln(1+e^x)$

$\Leftrightarrow \ln(1+e^x) = y - x$

$\Leftrightarrow 1+e^x = e^{y-x}$

$\Leftrightarrow 1+e^x = \frac{e^y}{e^x}$

$\Leftrightarrow e^{2x} + e^x = e^y$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x + \frac{1}{4} = e^y + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(e^x + \frac{1}{2}\right)^2 = e^y + \frac{1}{4}$ (αφού $e^y + \frac{1}{4} > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \left|e^x + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{e^y + \frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow e^x + \frac{1}{2} = \sqrt{e^y + \frac{1}{4}}$ (αφού $e^x + \frac{1}{2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow \; e^x = \sqrt{e^y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \; x = \ln\left[\sqrt{e^y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right]$

Πρεπει $\sqrt{e^y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} > 0$

$\sqrt{e^y + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$

$e^y + \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$

$e^y > 0$ ισχυει για καθε $y \in \mathbb{R}$

Οποτε $f^{-1}(x) = \ln\left[\sqrt{e^x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right], \; x \in \mathbb{R}$

(Γ4) Για να μην υπάρχει το όριο πρεπει να υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ ωστε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ με $f(x) > 0$ για $x > x_0$ και $f(x) < 0$ για $x < x_0$

Ομως απο ερωτημα Γ2 υπάρχει μοναδικο $x_0 \in (-1, 0)$ ωστε $f(x_0) = 0$ και αφου f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τοτε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

και επιπλεον για $x < x_0 \overset{f \uparrow}{\Longleftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$

και για $x > x_0 \overset{f \uparrow}{\Longleftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

οπότε $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x_0)} = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ αρα το

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπαρχει για το μοναδικο $x_0 \in (-1, 0)$ του Γ2

(Γ5) Αφου $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\ln\left(\sqrt{e^x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)\right] \xlongequal[u_0 = \lim\limits_{x \to \infty} u = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{e^x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right) = 0]{\text{θετω } u = \sqrt{e^x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}}$

διοτι $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$= \lim\limits_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$ τότε το όριο γίνεται:

διοτι $\sqrt{e^x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} > 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f^{-1}(x) \cdot \left(1 + \frac{1}{f^{-1}(x)} \eta\mu f^{-1}(x)\right)\right] \overset{*}{=} (-\infty) \cdot (1 + 0) = -\infty$

* Μορφη οριου

* Αφου $|ημ f^{-1}(x)| \leq 1$

$\overset{f^{-1}(x)\neq 0}{\Rightarrow} \left|\frac{1}{f^{-1}(x)}\right| \cdot |ημ f^{-1}(x)| \leq \left|\frac{1}{f^{-1}(x)}\right|$

$\Leftrightarrow -\left|\frac{1}{f^{-1}(x)}\right| \leq \frac{1}{f^{-1}(x)} \cdot ημ f^{-1}(x) \leq \left|\frac{1}{f^{-1}(x)}\right|$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \lim_{x\to-\infty}\left[-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right] = 0 \\ &\cdot \lim_{x\to-\infty}\left|\frac{1}{f^{-1}(x)}\right| = 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Κριτήριο Παρεμβολής}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f^{-1}(x)} \cdot ημ f^{-1}(x) = 0$$

Θέμα Δ

Δ1 Θέτω $g(x) = \frac{f(x)+x^2-7x}{x^2-2x}$, $x\neq 0$ κ' $x\neq 2$ με $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$

Τοτε $f(x) = g(x)(x^2-2x) - x^2 + 7x$

Οποτε $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[g(x)(x^2-2x)-x^2+7x\right] =$

$= 2\cdot 0 - 0 + 0 =$

$= 0$

κ' αφου f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τοτε $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Δ2 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot(x^2-2x)-x^2+7x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot[g(x)\cdot(x-2)-x+7]}{x} =$

$= 2\cdot(-2)+7 =$

$= 3$

Αρα f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 3$

Δ3 Αφου $f'(0)=3$ τοτε $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}} \overset{*}{=} \frac{3+1}{\frac{1}{4}} = 16$$

$* \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

$* \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$

Δ4 $\frac{e^{f(x)}-f(x)}{x} + \frac{f(x)}{x-a} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-a)\left(e^{f(x)}-f(x)\right) + x\cdot f(x) = 0$

Θεωρώ $g(x)=(x-a)\left(e^{f(x)}-f(x)\right)+x f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

g συνεχης στο $[0,a]$ ως πραξεις συνεχών

$g(0) = -a\cdot(1-0) = -a < 0$ {διοτι $a>0$}

$g(a) = a\cdot f(a) > 0$ {διοτι αφου $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$ με $f([0,+\infty))=[0,+\infty)$ τοτε μοναδική ρίζα της f ειναι το 0 με $f(0)=0$ και $f(x)>0$ για καθε $x>0$}

Αρα $g(0)\cdot g(a)<0$ οποτε

απο Θ. Bolzano υπαρχει ενα τουλαχιστον $x_0\in(0,a)$ ωστε $g(x_0)=0$

δηλαδη $(x_0-a)\left(e^{f(x_0)}-f(x_0)\right)+x_0 f(x_0)=0$

$$\overset{x_0\neq 0,\ x_0\neq a}{\Longleftrightarrow} \frac{e^{f(x_0)}-f(x_0)}{x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0-a} = 0$$

(Δ5) Αφου $x^2 \geq 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$ (Το = ισχυει μονο για $x=0$)

$\Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1$

$\Leftrightarrow e^{x^2}-1 \geq 0$

κ' $|ημx| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Το = ισχυει μονο για $x=0$)

$\Leftrightarrow |x|-|ημx| \geq 0$

κ' επιπλεον $f([0,+\infty)) = [0,+\infty)$ με $f \uparrow$ στο $[0,+\infty)$ κ' $f(0)=0$ μοναδική ρίζα, τότε για να ισχύει :

$f(e^{x^2}-1) + f(|x|-|ημx|) = 0$ πρεπει ταυτόχρονα

$f(e^{x^2}-1)=0$ κ' $f(|x|-|ημx|)=0$

Οποτε $e^{x^2}-1=0$ κ' $|x|-|ημx|=0$

Επομενως $x=0$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης