ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

5/3/2023

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A3}$ Ψ πχ. $f(x)=x^3$, $x\in[-1,1]$, το $\int_{-1}^{1} x^3 = 0$ όμως $f(x)\neq 0$ $\forall x\in[-1,1]-\{0\}$

$\boxed{A4}$ α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ • $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	↘	$-1/4$	↗	$\|\|$	↘

τοπικό ελάχιστο $f(-2) = -\frac{1}{4}$

• $f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(-x-2)}{(x^3)^2} = \frac{x^2(-x+3x+6)}{x^6} = \frac{x^2}{x^6}\cdot(2x+6) = \frac{2x^2}{x^6}(x+3)$

x		-3		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	∩	Σ.Κ	∪	$\|\|$	∪

σημείο καμπής $A\left(-3, -\frac{2}{9}\right)$

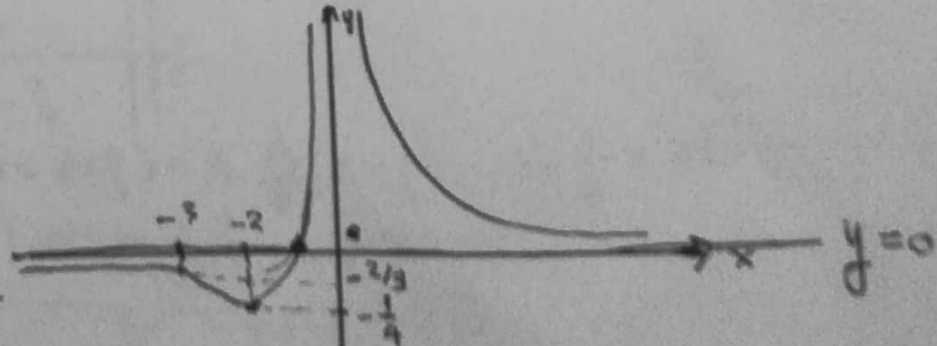
$\boxed{B2}$ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ άρα $\boxed{x=0}$ κατακόρυφη ασύ.

• $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ άρα $\boxed{y=0}$ ή xx' οριζόντια ασύμπ. και στο $+\infty$ κ' στο $-\infty$

$\boxed{B3}$ σημεία τομής με τον $x'x$: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \rightarrow (-1,0)$

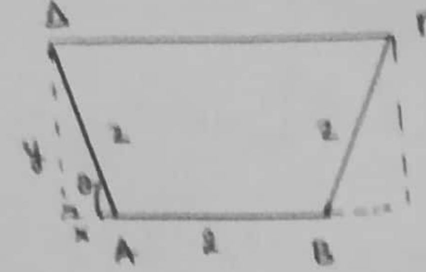
x		-3		-2		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	$\|\|$	$+$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	↘ ∩		↘ ∪		↗ ∪	$\|\|$	↘ ∪



$\boxed{B4}$ $E(\Omega) = \int_1^e |f(x)|\,dx \underset{\substack{f>0\\ x\in[1,e]}}{=} \int_1^e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = 2-\frac{1}{e}$ τ.μ.

Γ

Δ1



- $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\eta\mu\theta = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2\eta\mu\theta$

$E(\theta) = \frac{(\Delta\Gamma + AB)\cdot \upsilon}{2} = \frac{(4\sigma\upsilon\nu\theta + 4)\cdot 2\eta\mu\theta}{2}$

$\Leftrightarrow E(\theta) = 4(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)\eta\mu\theta, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\boxed{\Gamma 2}$ $E'(\theta) = 4\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) - 4\eta\mu^2\theta = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$= 4\sigma\upsilon\nu\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4 + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta \Leftrightarrow E'(\theta) = 4(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1)$

Θεωρώ, $g(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

- $\Delta = 1+8 = 9 \quad \theta_{1,2} = \frac{-1+3}{4} = 1/2, \quad \frac{-1-3}{4} = -1$ άρα $g(\theta) = 2(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2})$
- $\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \underset{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]}{\Longleftrightarrow} \theta = \frac{\pi}{3}$

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$
θ_0		0		$\pi/2$	
$g(\theta_0)$		$1/2$	0	$-1/2$	
$g(\theta)$		+	0	−	

Συνέχεια Θ.Β. αφού g συνεχής ως τριγ. στο $[0, \frac{\pi}{2}]$

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$
$g(\theta)$		+	0	−	
$E'(\theta)$		+	0	−	
$E(\theta)$		↗		↘	

$OM = E(\frac{\pi}{3}) = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}\,\frac{3}{2} = 3\sqrt{3}$

* β' τρόπος Πρόσημο της $h(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

- $h(\frac{\pi}{3}) = 0, \quad h'(\theta) = -\eta\mu\theta < 0$ άρα $h \downarrow$ στο $(0, \frac{\pi}{2})$

$x > \frac{\pi}{3} \overset{h\downarrow}{\Longleftrightarrow} h(x) < h(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow h(x) < 0, \quad x \in (\pi/3, \frac{\pi}{2})$

$x < \frac{\pi}{3} \underset{h\downarrow}{\Longleftrightarrow} h(x) > h(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow h(x) > 0, \quad x \in (0, \frac{\pi}{3})$

Ε συνεχής κ' ↑ στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ άρα $E(A_1) = \left(0, 3\sqrt{3}\right]$

Ε συνεχής κ' ↓ στο $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα $E(A_2) = \left(4, 3\sqrt{3}\right]$

• $5 \in E(A_1)$, $5 \in E(A_2)$ άρα η εξίσωση $E(\theta) = 5$ έχει 2 ΤΟΥΛ. ΡΙΖΕΣ κ' ΕΙΝΑΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΑΦΟΥ Ε ΓΝ. ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΣΤΑ A_1, A_2

Δηλ. $\exists\, \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ τ.ω. $E(\theta_1) = 5$ κ' $\exists\, \theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ τ.ω. $E(\theta_2) = 5$

$\boxed{\Gamma_4}$ α) $E''(\theta) = -8\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta - \text{ημ}\theta < 0$ άρα $E(\theta)$ ∩ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ΟΠΟΤΕ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

β) $(\varepsilon): y = E'(\theta_4)(\theta - \theta_4) + E(\theta_4)$ εφαπτομένη της C_E στο $(\theta_4, E(\theta_4))$

ΕΠΕΙΔΗ Ε ∩ κοίλη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ΤΟΤΕ:

$$E(\theta) \leq E'(\theta_4)(\theta - \theta_4) + E(\theta_4) \quad \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$ ΚΑΙ ΤΟ <u>ΙΣΟΝ</u>

ΙΣΧΥΕΙ <u>ΜΟΝΟ</u> ΟΤΑΝ $\theta = \theta_4$

Άρα, $\theta_3 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ΙΣΧΥΕΙ: $E(\theta_3) \leq E'(\theta_4)(\theta_3 - \theta_4) + E(\theta_4)$

ΕΠΙΣΗΣ, $E(\theta) \leq 3\sqrt{3}$ $\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ΚΑΙ ΤΟ <u>ΙΣΟΝ</u> ΙΣΧΥΕΙ <u>ΜΟΝΟ</u> ΟΤΑΝ $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$E(\theta_3) \leq E'(\theta_4)(\theta_3 - \theta_4) + E(\theta_4) \overset{E(\theta_4) \leq 3\sqrt{3}}{\leq} E'(\theta_4)(\theta_3 - \theta_4) + 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow E(\theta_3) \leq E'(\theta_4)(\theta_3 - \theta_4) + 3\sqrt{3}$$

άρα ΙΣΟΤΗΤΑ ΙΣΧΥΕΙ <u>ΜΟΝΟ</u> ΟΤΑΝ $\theta_3 = \theta_4 = \frac{\pi}{3}$

ΤΡΟΠΟΣ: Εαν $\theta_3 \neq \theta_4$ κ' εστω $\theta_3 < \theta_4$ τοτε

απο ΘΜΤ στο $[\theta_3, \theta_4]$: $E'(\xi_1) = \dfrac{E(\theta_4) - E(\theta_3)}{\theta_4 - \theta_3}$

με $\theta_3 < \xi_1 < \theta_4 \overset{E' \downarrow}{\Leftrightarrow} E'(\xi_1) > E'(\theta_4)$

$$\Leftrightarrow \frac{E(\theta_4) - E(\theta_3)}{\theta_4 - \theta_3} > E'(\theta_4) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$E(\theta_3) < E'(\theta_4)(\theta_3 - \theta_4) + E(\theta_4) \leq E'(\theta_4)(\theta_3 - \theta_4) + 3\sqrt{3}$$

$\downarrow$ $E(\theta_4) \leq 3\sqrt{3}$

Αρα $E(\theta_3) < E'(\theta_4)(\theta_3 - \theta_4) + 3\sqrt{3}$ Αρα δεν μπορει

να ισχυει η ισοτητα οταν $\theta_3 \neq \theta_4$ οποτε $\theta_3 = \theta_4$

Για $\theta_3 = \theta_4$: $E(\theta_3) = 0 + 3\sqrt{3} \Leftrightarrow E(\theta_3) = 3\sqrt{3}$

Που το ισον ισχυει μονο οταν $\theta_3 = \dfrac{\pi}{3}$

Τελικα, $\theta_3 = \theta_4 = \dfrac{\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{Δ1}$ $f(x) \le y \Leftrightarrow f(x) \le (\alpha \cdot e)^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow f(x) \le f(e)$ άρα η f παρουσιάζει στο $x = e \in (0,+\infty)$ ολικό μέγιστο άρα από Θ. Fermat $f'(e)=0$

▸ Για $x>0$: $f'(x) = \left(e^{\frac{\ln(\alpha x)}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln(\alpha x)}{x}} \cdot \left(\frac{1-\ln(\alpha x)}{x^2}\right)$

• $f'(e)=0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln(\alpha \cdot e)}{e}} \cdot \frac{1-\ln(\alpha e)}{e^2} = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln(\alpha e) \Leftrightarrow e = \alpha e$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$\boxed{Δ2}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} \overset{*}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0 = f(0)$ άρα f συνεχής στο $x_0=0$

$*$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \ln x = +\infty(-\infty) = -\infty$

▸ $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) = \frac{f(x)}{x^2}(1-\ln x)$

• $1-\ln x \ge 0 \Leftrightarrow -\ln x \ge -1 \Leftrightarrow \ln x \le \ln e \Leftrightarrow x \le e$

x	0		e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$
	Τ.Ε		ΟΜ	

Τ.Ε. $= f(0) = 0$

Ο.Μ. $= f(e) = e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e}$

▸ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \overset{**}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$

$**$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

άρα f συνεχής κ' $\nearrow$ στο $\Delta_1 = [0,e] \to f(\Delta_1) = [0, \sqrt[e]{e}]$

f συνεχής κ' $\searrow$ στο $\Delta_2 = [e,+\infty) \to f(\Delta_2) = (1, \sqrt[e]{e}]$

οπότε $f(A) = [0, \sqrt[e]{e}]$

$f\left(x^{\frac{3}{x}}+x^{\frac{1}{x}}-2+e\right)=f(e)$ άρα

$x^{\frac{3}{x}}+x^{\frac{1}{x}}-2+e=e \Leftrightarrow x^{\frac{3}{x}}+x^{\frac{1}{x}}=2$

- Θεωρώ, $k(x)=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$, $k'(x)>0$ άρα $k \uparrow$ οπότε κ' 1-1

άρα $k(f(x))=k(1) \overset{1-1}{\underset{k}{\Leftrightarrow}}$

$\Leftrightarrow f(x)=1$

- ΠΡΟΦΑΝΗΣ ΡΙΖΑ : $\boxed{x_1=1}$

$1\in f(\Delta_1)$, $1\notin f(\Delta_2)$ άρα η $f(x)=1$

ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛ. ΤΗΝ $x_1=1\in\Delta_1$ κ' ΕΠΕΙΔΗ

f ΓΝ. ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΣΤΟ Δ_1 ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ

β' ΤΡΟΠΟΣ : $f^3(x)+f(x)=2$, ΠΡΟΦΑΝΗΣ ΡΙΖΑ $x_1=1$

Για $\boxed{0\le x<1}$: $x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<1 \Leftrightarrow f^3(x)<1$

$f^3(x)+f(x)<2$, ΟΤΑΝ $x\in[0,1)$

Για $\boxed{x>1}$:

$$\begin{cases} f((1,e])=(1,\sqrt[e]{e}] & \text{αφού } f \uparrow \text{ στο } (1,e] \\ \text{ΚΑΙ} & \\ f([e,+\infty))=(1,\sqrt[e]{e}] & \text{αφού } f \downarrow \text{ στο } [e,+\infty) \end{cases}$$

άρα σε ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $f(x)>1 \Leftrightarrow f^3(x)>1$

ΟΠΟΤΕ $f^3(x)+f(x)>2$, ΟΤΑΝ $x\in(1,+\infty)$

Τελικά, Η f ΕΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ $\boxed{x_1=1}$

$\underline{4}]$ $g(x) = f(x)\dfrac{1-\ln x}{x^2} = f'(x)$, $x>0$

• $g(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=e}$

• $\boxed{\lambda \neq 0}$ ΕΠΕΙΔΗ ΑΝ $\lambda=0$ ΤΟΤΕ ΤΟ $\int_0^e |f'(x)|dx$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ

ΚΑΠΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟ αφου $Af' = (0,+\infty)$

• 1^{η} ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\boxed{0<\lambda^2<e}$:

$$E(\Omega) = \int_{\lambda^2}^{e} |f'(x)|dx \underset{\substack{f'>0 \\ 0<x<e}}{=} \int_{\lambda^2}^{e} f'(x)dx = [f(x)]_{\lambda^2}^{e} = f(e) - f(\lambda^2) = \sqrt[e]{e} - f(\lambda^2)$$

▸ $E(\Omega) \geq \sqrt[e]{e} - 1 \Leftrightarrow \cancel{\sqrt[e]{e}} - f(\lambda^2) \geq \cancel{\sqrt[e]{e}} - 1 \Leftrightarrow$

$f(\lambda^2) \leq 1 \Leftrightarrow f(\lambda^2) \leq f(1) \underset{\substack{x\in(0,e) \\ f\uparrow}}{\Longleftrightarrow} \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$

αρα $\lambda \in [-1,0) \cup (0,1]$

• 2^{η} ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\boxed{\lambda^2>e}$:

$$E(\Omega) = \int_e^{\lambda^2} |f'(x)|dx = -\int_e^{\lambda^2} f'(x)dx = \int_{\lambda^2}^{e} f'(x)dx = \sqrt[e]{e} - f(\lambda^2)$$

▸ $E(\Omega) \geq \sqrt[e]{e} - 1 \Leftrightarrow f(\lambda^2) \leq 1$ ΑΔΥΝΑΤΗ

αφου ΓΙΑ $\lambda^2>e$ απο $\underline{\Delta 2}]$ ΕΧΟΥΜΕ $f(\Delta_2) = (1, \sqrt[e]{e}]$

ΔΗΛ. $f(\lambda^2)>1$

ΤΕΛΙΚΑ, $\lambda \in [-1,0) \cup (0,1]$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\lambda^2 < e$ ή $\lambda^2 > e$

ΕΧΟΥΜΕ $E(\Omega) = f(e) - f(\lambda^2)$

ΘΕΛΟΥΜΕ, $E(\Omega) \geq f(e) - 1$

$\Leftrightarrow f(e) - f(\lambda^2) \geq f(e) - 1$

$\Leftrightarrow f(\lambda^2) \leq 1 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln\lambda^2}{\lambda^2}} \leq 1 \overset{\boxed{\lambda \neq 0}}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln\lambda^2}{\lambda^2} \leq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda^2 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow$

$-1 \leq \lambda \leq 1$ ΤΕΛΙΚΑ $\lambda \in [-1, 0) \cup (0, 1]$