ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

13-5-2023

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A4}$ 1 Λ 2 Σ 3 Σ 4 Λ 5 Λ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ $A_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} / e^{x-1} > 1\} = \{x \in \mathbb{R} / x-1>0\} = (1,+\infty)$

$f(g(x)) = \ln(e^{x-1}-1),\ x>1$

$\boxed{B2}$ $k(x) = f(g(x)) = \ln(e^{x-1}-1),\ x>1$

$k'(x) = \dfrac{e^{x-1}}{e^{x-1}-1} > 0$ άρα $k \uparrow$ στο $(1,+\infty) \rightarrow k(A) = \left(\lim\limits_{x\to1^+} k(x), \lim\limits_{x\to+\infty} k(x)\right) =$

$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

• Για $y \in \mathbb{R}$ κ' $x>1$ θέτουμε $k(x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(e^{x-1}-1) = y \Leftrightarrow e^{x-1}-1 = e^y \Leftrightarrow e^{x-1} = e^y+1 \Leftrightarrow x-1 = \ln(e^y+1)$

$\Leftrightarrow x = \ln(e^y+1)+1$ άρα $k^{-1}(x) = \ln(e^x+1)+1,\ x\in\mathbb{R}$

$\boxed{B3}$ $h(x) = \ln(e^x+1)+1,\ x\in\mathbb{R}$ με $h'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

• h παρ/μη στο $[-1,1]$ ως σύνθεση παρ/μων συναρτήσεων

άρα από ΘΜΤ $\exists\ \xi \in (-1,1):\ h'(\xi) = \dfrac{h(1)-h(-1)}{2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^\xi}{e^\xi+1} = \dfrac{\ln(e+1)+\cancel{1}-\ln(e^{-1}+1)-\cancel{1}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e^\xi}{e^\xi+1} = \dfrac{1}{2}\left(\ln(e+1) - \ln\dfrac{e+1}{e}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^\xi}{e^\xi+1} = \dfrac{1}{2}\left(\cancel{\ln(e+1)} - \cancel{\ln(e+1)} + \ln e\right) \Leftrightarrow \dfrac{e^\xi}{e^\xi+1} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2e^\xi = e^\xi+1 \Leftrightarrow e^\xi = 1 \Leftrightarrow \xi = 0$

$\boxed{B4}$ $h(h^{-1}(x)) = x^2-x+1 \Leftrightarrow x = x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (1,+\infty)$ ΑΔΥΝΑΤΗ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 • $1-\ln x$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως λογαριθμική

• $\frac{1}{x}$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως ρητή

• $|1-\ln x|$ συνεχής στο $(0,+\infty)$

Τελικά, η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ πράξεις συνεχών

▸ $1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq -1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e \Leftrightarrow x \leq e$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Οπότε $x\in(0,e)$: $|1-\ln x| = 1-\ln x$

$x\in(e,+\infty)$: $|1-\ln x| = \ln x - 1$

Οπότε, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\ln x}{x}, & 0<x<e \\ \dfrac{\ln x-1}{x}, & x\geq e \end{cases}$

Γ2 Για $x\in(0,e)$: $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$ παρ/μη ως πράξεις παρ/μων με

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-1+\ln x}{x^2}=\frac{-2+\ln x}{x^2}$$

▸ $f'(x)\geq 0 \Rightarrow -2+\ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq 2 \Leftrightarrow x\geq e^2$ άρα $-2+\ln x<0\ \forall x\in(0,e)$

Για $x\in(e,+\infty)$: $f(x)$ παρ/μη ως πράξεις παρ/μων με

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x+1}{x^2}=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

▸ $f'(x)\geq 0 \Rightarrow 2-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq e^2$

x	0		e		e^2		$+\infty$
$-2+\ln x$	‖	$-$					
$2-\ln x$	‖			$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↘		↗		↘	
			Τ.Ε. $= 0$		Τ.Μ.		

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-1}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=f(e)=0$$

άρα $f(e)$ = ολικό ελάχιστο

$\boxed{\Gamma 3}$ $x'(t) = 1 m/sec$

(i) $(AOB) = \dfrac{(OA)(OB)}{2} = \dfrac{x \cdot |f(x)|}{2} = \dfrac{x \dfrac{|1-\ln x|}{x}}{2} = \dfrac{|1-\ln x|}{2}$

άρα $E(t) = \dfrac{1}{2} |1 - \ln x(t)|$

Εφόσον $x(t_0) = 4 > e$ τότε $E(t) = \dfrac{1}{2}(\ln x - 1)$, $x \geq e$

$E'(t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x'(t)}{x(t)} - 0\right) = \dfrac{x'(t)}{2x(t)} = \dfrac{1}{2x(t)}$

Για $t = t_0$: $E'(t_0) = \dfrac{1}{2x(t_0)} = \dfrac{1}{8} m^2/sec$

ii) $x'(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = t + c$

Για $t = 0$: $1 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$ οπότε $x(t) = t + 1$

άρα $x(t_0) = 4 \Leftrightarrow t_0 + 1 = 4 \Leftrightarrow t_0 = 3$ sec.

$\boxed{\Gamma 4}$ • $\displaystyle\int_e^{e^2} f(t)\,dt = \int_e^{e^2} \frac{\ln t - 1}{t}\,dt \overset{\substack{u=\ln t}}{\underset{\substack{du = \frac{1}{t}dt \\ u_1 = 1 / u_2 = 2}}{=\!=\!=}} \int_1^2 (u-1)\,du =$

$\left[\dfrac{u^2}{2} - u\right]_1^2 = \dfrac{4}{2} - 2 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$

Είναι: $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_e^{e^2} f(t) g(1-x)\,dt \right) dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(g(1-x) \cdot \int_e^{e^2} f(t)\,dt \right) dx = 2$

$\displaystyle\Leftrightarrow \int_0^1 g(1-x) \cdot \frac{1}{2}\,dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 g(1-x)\,dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 g(u)\,du = 4$

Θέτουμε $u = 1 - x$
$du = -dx$
$u_1 = 1 / u_2 = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Θεωρω $h(x) = f(x) - \frac{x}{e^x}$

- h συνεχης στο $[0,3]$ ως πραξεις συνεχων
- $h(0) = f(0) - 0$

  $h(3) = f(3) - \frac{3}{e^3}$

Εστω, $h(0)h(3) > 0 \Rightarrow (f(0)-0)\left(f(3) - \frac{3}{e^3}\right) > 0$

αρα οι αριθμοι $(f(0)-0)$ κ' $f(3) - \frac{3}{e^3}$ ειναι ομοσημοι

Εστω, $f(0) - 0 > 0$ κ' $f(3) - \frac{3}{e^3} > 0$ δηλ. $f(0) > 0$ κ' $f(3) > \frac{3}{e^3}$

Εφοσον, $e^{\sqrt{x}} > 0$ τοτε $\int_0^{f(0)} e^{\sqrt{x}}\,dx \cdot \int_{\frac{3}{e^3}}^{f(3)} e^{\sqrt{x}}\,dx > 0$ Ατοπο

Ομοιως αν $f(0) < 0$ κ' $f(3) < \frac{3}{e^3}$

Αρα $h(0)h(3) \leq 0$

Αν $h(0) \cdot h(3) = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$ ή $h(3) = 0$

Αν $h(0)h(3) < 0$ απο Θ. Bolzano υπαρχει $x_0 \in (0,3)$: $h(x_0) = 0$

Γενικα, $\exists x_0 \in [0,3]$: $f(x_0) = \frac{x_0}{e^{x_0}}$

Δ2 • $|e^x f(x) - x - (e^y f(y) - y)| \leq |x-y|^2 \Leftrightarrow |g(x) - g(y)| \leq |x-y|^2$

$y = x_0 \neq x \Rightarrow \left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|$

$-|x-x_0| \to 0$, $\quad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{\text{κπ}} 0$, $\quad |x-x_0| \to 0$

Αρα $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = 0$

Οποτε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c \in \mathbb{R}$

Για $x = x_0$: $e^{x_0} f(x_0) - x_0 = c \Leftrightarrow x_0 - x_0 = c \Leftrightarrow c = 0$

Αρα, $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Delta 3}$ (i) $f'(x) = \dfrac{e^x - e^x \cdot x}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$

· $f''(x) = \dfrac{-e^x - e^x(1-x)}{e^{2x}} = \dfrac{-1-1+x}{e^x} = \dfrac{x-2}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

ΣΚ
$M(2, f(2)) = (2, \frac{2}{e^2})$

$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x-2)$
$\Rightarrow y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

ΟΕ

$f'(x) \geq f'(2) = \frac{-1}{e^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ΚΑΙ ΤΟ ΙΣΟΝ ΙΣΧΥΕΙ ΜΟΝΟ ΓΙΑ $x=2$

ii) · $f(\lambda - e^2) \leq 1 + \dfrac{\lambda}{e^\lambda} \Leftrightarrow f(\lambda - e^2) - f(\lambda) \leq 1$

$\rightarrow$ ΑΡΑ ΘΜΤ ΣΤΟ $[\lambda - e^2, \lambda]$

f ΠΑΡ/ΜΗ ΣΤΟ $[\lambda - e^2, \lambda]$ απο ΘΜΤ $\exists x_1 \in (\lambda - e^2, \lambda)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(\lambda) - f(\lambda - e^2)}{\cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} + e^2} = \frac{f(\lambda) - f(\lambda - e^2)}{e^2}$$

Εχουμε, οτι $f'(x_1) \geq -\frac{1}{e^2} \Leftrightarrow \dfrac{f(\lambda) - f(\lambda - e^2)}{\cancel{e^2}} \geq -\dfrac{1}{\cancel{e^2}}$

$\Leftrightarrow f(\lambda) - f(\lambda - e^2) \geq -1 \Leftrightarrow f(\lambda - e^2) - f(\lambda) \leq 1$

$\boxed{\Delta 4}$ $x_0 \in [0,3]$ απο το Δ1 αφου υπαρχει το $E(\Omega)$ τοτε $x_0 \neq 0$
αφα $x_0 > 0$

· $E = \displaystyle\int_0^{x_0} |f(x)|\,dx = \int_0^{x_0} \left|\frac{x}{e^x}\right| dx \underset{x>0}{=} \int_0^{x_0} x \cdot e^{-x}\,dx =$

$= \left[-xe^{-x}\right]_0^{x_0} - \displaystyle\int_0^{x_0} -e^{-x_0}\,dx = -x_0 \cdot e^{-x_0} - \left[e^{-x}\right]_0^{x_0} =$

$= -x_0 e^{-x_0} - e^{-x_0} + 1$

ΙΣΧΥΕΙ: $e^2(E-1) = x_0 - 4 - e^{2-x_0}$

$\Leftrightarrow e^2(-x_0 e^{-x_0} - e^{-x_0} \cancel{+1} \cancel{-1}) = x_0 - 4 - e^{2-x_0}$

$\Leftrightarrow -e^2 \frac{x_0}{e^{x_0}} \cancel{- e^{2-x_0}} = x_0 - 4 \cancel{- e^{2-x_0}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -e^2 f(x_0) = x_0 - 4 \Leftrightarrow f(x_0) = -\frac{1}{e^2} x_0 + \frac{4}{e^2}$

• ΠΡΟΦΑΝΗΣ ΡΙΖΑ $x_0 = 2$ (ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ)

$f(2) = -\frac{1}{e^2} 2 + \frac{4}{e^2} \Leftrightarrow \frac{2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$

• ΑΝ $x_0 \in (0,2)$ ΤΟΤΕ: $f(x) < -\frac{1}{e^2} x + \frac{4}{e^2}$ αφού f ∩ στο $(0,2)$

ΑΝ $x_0 \in (2,3]$ ΤΟΤΕ: $f(x) > -\frac{1}{e^2} x + \frac{4}{e^2}$ αφού f ∪ στο $(2,3]$

ΤΕΛΙΚΑ $\boxed{x_0 = 2}$

β' ΤΡΟΠΟΣ: θεωρώ $h(x) = f(x) + \frac{1}{e^2} x - \frac{4}{e^2}$

$h(2) = 0$

$h'(x) = f'(x) + \frac{1}{e^2} \geq 0$ άρα $h \uparrow$

ΕΧΟΥΜΕ από $\boxed{\Delta 3}$ $f'(x) + \frac{1}{e^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ΟΠΟΤΕ $x_0 = 2$ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ