Λύσεις διαγωνίσματος της 4/11/2023

Θέμα Α:

(Α3) Ψευδής, f όχι παρ/μη στο $x_0=0$: $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-\overset{0}{\cancel{f(0)}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

(Α4) Σ, Λ, Λ, Λ, Λ

Θέμα Β:

(Β1) Κατακόρυφες: f συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ ως ρητή $\Rightarrow$ μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $x=1$, όπου:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-x+4)\cdot\frac{1}{x-1}=4\cdot(+\infty)=+\infty \Rightarrow x=1 \text{ κατ. ασύμ. της } C_f.$$

Πλάγιες/οριζόντιες στο $+\infty$:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+4-\cancel{x^2}+\cancel{x}}{x-1}=0.$$

$\Rightarrow y=x$ πλάγια ασύμ. C_f στο $+\infty$.

Πλάγιες/οριζόντιες στο $-\infty$:

Επειδή f ρητή, εντελώς όμοια προκύπτει ότι $\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\beta=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=0$

$\Rightarrow y=x$ πλάγια ασύμ. C_f και στο $-\infty$.

(Β2) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$ ως ρητή με:

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+4)'\cdot(x-1)-(x^2-x+4)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(2x-1)\cdot(x-1)-(x^2-x+4)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-3x+1-x^2+x-4}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2},\ x\neq 1.$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$

- $f'(x)>0 \xLeftrightarrow{(x-1)^2>0} x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow x>3$ ή $x<-1$.

(B3) Είναι $f(2)=6$ και $f'(2)=-3$, άρα είναι η:

$$\varepsilon: \ y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2) \Rightarrow$$

$$y-6=-3(x-2) \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon: y=-3x+12}$$

(B4) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-x+4)\cdot\frac{1}{x-1} = 4\cdot(-\infty) = -\infty.$

Συνεπώς: $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{f(x)} \underset{\substack{x\to 1^- \\ u\to -\infty}}{\overset{u=f(x)}{=\!=}} \lim\limits_{u\to -\infty} e^{u} = 0.$

Θέμα Γ:

(Γ1) $\forall x>0: \; x\left(f(x)-\ln x\right)=f(x) \Rightarrow x f(x) - x\ln x = f(x) \Rightarrow f(x)(x-1) = x\ln x.$

• Για $x\neq 1$: $\quad f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}.$

• Για $x=1$: $\quad f$ συνεχής στο $x_0=1$, άρα $f(1)=\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{(x)'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)'}{1}=\lim_{x\to1}\left(\ln x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)=1.$$

Συνδυάζοντας τα ανωτέρω έπεται ότι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1.\end{cases}$

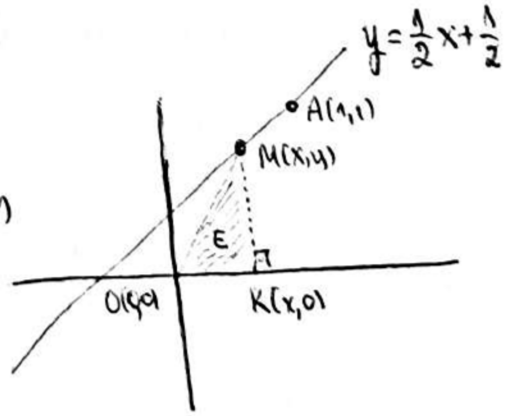
(Γ2) $$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x - x+1}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x\ln x - x+1)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{2(x-1)\cdot(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{2(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(2(x-1))'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R} \Rightarrow f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0=1$$

με $f'(1)=\frac{1}{2}$. Άρα:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y-1=\frac{1}{2}\cdot(x-1) \Rightarrow \boxed{\varepsilon: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$$



(Γ3) Έστω $x=x(t)$ και $y=y(t)=\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}$, τότε το ζητούμενο εμβαδόν $E=E(t)$ ως συνάρτηση του t είναι:

$$E(t)=\frac{1}{2}\cdot|x(t)|\cdot|y(t)| \xrightarrow[\text{δηλ. } x(t),\,y(t)>0]{x>0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$$

$$E(t)=\frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot\left(\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\,x(t)\left(x(t)+1\right) \Rightarrow E(t)=\frac{x^2(t)+x(t)}{4}.$$

Ζητάμε το $E'(t_0)$, τη στιγμή t_0 κατά την οποία το Μ συμπίπτει με το $A(1,1)$, δηλαδή όταν $x(t_0)=1$. Έτσι:

$$E'(t)=\frac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{4}\overset{x'(t)=2}{=\!=}\frac{4x(t)+2}{4}=\frac{2x(t)+1}{2}$$

$$E'(t_0)=\frac{2x(t_0)+1}{2}=\frac{2\cdot1+1}{2}\Rightarrow\boxed{E'(t_0)=\frac{3}{2}\text{ τ.μ./s}}$$

(Γ4) Στο $(2,3)$: $\quad f(x)=x-1 \Leftrightarrow \dfrac{x\ln x}{x-1}-x+1=0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}-x+1,\ x\in[2,3]$.

- g συνεχής στο $[2,3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

- $g(2)=2\ln2-1=\ln4-\ln e>0$ γιατί $e<4$

$g(3)=\dfrac{3\ln3}{2}-2=\dfrac{\ln27-\ln e^4}{2}<0$ γιατί $e^4>27$.

άρα $g(2)g(3)<0$

$\xrightarrow{\text{Bolzano}}$ $\exists x_0\in(2,3)$ ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0-1$.

Ακόμα, g παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=\frac{(x\ln x)'\cdot(x-1)-x\ln x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}-1=\frac{(\ln x+1)\cdot(x-1)-x\ln x-(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{x\ln x}-\ln x+x-1-\cancel{x\ln x}-(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-\ln x-x^2+3x-2}{(x-1)^2}\Rightarrow$$

$g'(x)=-\dfrac{\ln x+x^2-3x+2}{(x-1)^2}>0\ \forall x\in[2,3]$ αφού $\ln x>0$ και $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\geq0$

$\Rightarrow g\downarrow[2,3]\Rightarrow x_0$ μοναδική ρίζα στο $(2,3)$

Θέμα Δ:

(Δ1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, $x\geq 0$.

- g συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων (f συνεχής)
- $\forall x\geq 0 \quad f(x)\neq x \Rightarrow \forall x\geq 0 \quad g(x)\neq 0$

$\Longrightarrow$ η g διατηρεί πρόσημο στο $[0,+\infty)$.

Όμως $\forall x\geq 0$ $\left.\begin{array}{l} f(x)\geq 0 \Rightarrow f(0)\geq 0 \\ \text{και} \\ f(x)\neq x \Rightarrow f(0)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)>0$, οπότε

$\forall x\geq 0 \quad g(x)>0 \Rightarrow \boxed{\forall x\geq 0 \quad f(x)>x}$

(Δ2) $\forall x\geq 0 \quad f(x)\geq x>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Οπότε: $\forall x\geq 0 \quad -1\leq \eta\mu x\leq 1 \xRightarrow{f(x)>0} -\dfrac{1}{f(x)}\leq \dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\leq \dfrac{1}{f(x)}$

όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Από κριτήριο παρεμβολής: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}=0.}$

(Δ3) $\forall x\geq 0: \quad f^2(x)=2xf(x)+3 \Rightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+3 \Rightarrow$

$(f(x)-x)^2=x^2+3 \Rightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2+3} \xRightarrow{f(x)>x}$

$\underbrace{f(x)-x}_{g(x)}=\sqrt{x^2+3} \Rightarrow \boxed{f(x)=x+\sqrt{x^2+3},\ x\geq 0}$

- Κατακόρυφες: δεν υπάρχουν, γιατί η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

- Πλάγιες/οριζόντιες στο $+\infty$:

$\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x}\right) \xlongequal[x>0]{x\to+\infty} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}}\right) = 1+1=2$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0,$$

διότι $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right) = (+\infty)+(+\infty) = +\infty.$

$\Rightarrow$ $y=2x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(Δ4) Για τις $g(x) = f(x)-x = \sqrt{x^2+3}$ και $h(x) = \frac{2}{x}$, $x>0$, έχουμε

- <u>σημεία τομής</u>: $g(x) = h(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \frac{2}{x} = 0$

  έστω $\varphi(x) = \sqrt{x^2+3} - \frac{2}{x}$, $x>0$.

  Προφανής ρίζα το 1: $\varphi(1)=0$

  φ παρ/μη με $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot\underbrace{(x^2+3)'}_{=2x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{2}{x^2} > 0$

  $\Rightarrow \varphi \nearrow (0,+\infty) \rightarrow 1$ μοναδική ρίζα της φ.

Οπότε $M(1, g(1))$, δηλ. $M(1,2)$ μοναδικό κοινό σημείο των C_g και C_h.

[αλλιώς, πιο απλά: $\sqrt{x^2+3} = \frac{2}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2+3 = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=1$ ή $x^2=-4 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x=1$.]

- <u>εφαπτόμενες στο M</u>: g, h παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ με:

$$\left.\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot\underbrace{(x^2+3)'}_{=2x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{2} \\ &\text{και} \\ h'(x) &= -\frac{2}{x^2} \Rightarrow h'(1) = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$g'(1)\cdot h'(1) = -1$

άρα οι εφαπτόμενες των C_g και C_h στο M είναι κάθετες.