ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

16/9/2023

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A4}$ α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ • f παρ/μη στο $(-\infty, 1)$ ως ρητή με:

$$f'(x) = \frac{\alpha(x-1) - \alpha x}{(x-1)^2} = \frac{\alpha x - \alpha - \alpha x}{(x-1)^2} = \frac{-\alpha}{(x-1)^2}$$

• $f'(-1) = -1 \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{4} = -1 \Leftrightarrow \alpha = 4$ οπότε $f(x) = \frac{4x}{x-1}$

$\boxed{B2}$ $f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0$ άρα $f \downarrow$ στο $(-\infty, 1)$ οπότε κ' "1-1"

▷ Θέτουμε, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{4x}{x-1} = y \Leftrightarrow 4x = yx - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - yx = -y \Leftrightarrow x(4-y) = -y \overset{y \neq 4}{\Leftrightarrow} x = \frac{y}{y-4}$

Πρέπει: $x < 1 \Leftrightarrow \frac{y}{y-4} < 1 \Leftrightarrow \frac{y}{y-4} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{\cancel{y} - \cancel{y} + 4}{y-4} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{4}{y-4} < 0 \Leftrightarrow y - 4 < 0 \Leftrightarrow y < 4$

οπότε $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-4}$, $x < 4$.

$\boxed{B3}$ $A_{g\circ f^{-1}} = \{x \in A_{f^{-1}} \,/\, f^{-1}(x) \in A_g\} = \{x < 4 \,/\, \frac{x}{x-4} > 0\} = (-\infty, 0)$

• $\frac{x}{x-4} > 0 \overset{x \neq 4}{\Leftrightarrow} x(x-4) > 0 \underset{x-4<0}{\Leftrightarrow} x < 0$

Άρα, $g(f^{-1}(x)) = \ln \frac{x}{x-4}$, $x < 0$

$\boxed{B4}$ Θεωρούμε, $K(x)=\dfrac{x}{x-4}+\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

• K συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών

$K(0)=1>0$

$K\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi/2}{\frac{\pi}{2}-4}<0$ άρα $K(0)K\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ Θ. Bolzano ...

$\boxed{B5}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-4}\sigma\upsilon\nu\dfrac{2023}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-4}\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2023}{x}=-4\cdot 0=0$

$\left|x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2023}{x}\right|\le |x| \iff \underset{\downarrow\atop 0}{-|x|}\le \underset{\downarrow \text{ κ.π.}\atop 0}{x\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{2023}{x}}\le \underset{\downarrow\atop 0}{|x|}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Είναι, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+2h)-f(4)}{h} = 1 \overset{u=2h}{\iff}$

$$\iff \lim_{u\to 0} \frac{f(4+u)-f(4)}{\frac{1}{2}u} = 1 \iff 2f'(4) = 1 \iff f'(4) = 1/2$$

Για $\boxed{x>0}$: $f(x) = 2\sqrt{x} + \alpha x + \beta$ παρ/μη ως πράξεις παρ/μων με:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \alpha$$

Έχουμε, $f'(4) = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \alpha \iff \boxed{\alpha = 0}$

Δ f συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \iff \boxed{\beta = 1}$

Γ2 • Για $\boxed{x<0}$: $f(x) = x^2 + x + 1$ παρ/μη ως πολ/κή με $f'(x) = 2x+1$

• Για $\boxed{x>0}$: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+1) = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = +\infty \end{cases}$$

άρα $f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x>0 \end{cases}$

Γ3 α) Για $x>0$: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ άρα $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

κ' επειδή f συνεχής στο $[0,+\infty)$ $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$ οπότε κ' "1-1"

▸ Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1=y \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=y-1 \overset{y\geq 1}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{4}(y-1)^2\geq 0$

άρα $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2,\ x\geq 1$

β) • $x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1$ άρα η $K(x)=f^{-1}(x^2+1)+5,\ x\in\mathbb{R}$

• $A_{f\circ K}=\{x\in\mathbb{R} / K(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ άρα το σύνολο ορισμού

της εξίσωσης είναι <u>όλο το $\mathbb{R}$</u>

Επίσης, $f^{-1}(x)\geq 0\ \forall x\geq 1$ άρα $K(x)\geq 5>0$

▸ $f(f^{-1}(x^2+1)+5)=7 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x^2+1)+5)=f(9) \underset{x>0}{\overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow}}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+1)+5=9 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2+1)=4 \Leftrightarrow x^2+1=f(4) \Leftrightarrow$

$x^2+1=5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 2}$

Γ4 Για $K=1$: Θεωρούμε $g(x)=(x-1)f(\gamma)+(x-2)f^{-1}(\delta),\ x\in[1,2]$

• g συνεχής στο $[1,2]$ ως πολ/κή

• $g'(x)=f(\gamma)+f^{-1}(\delta)>0^{*}$ άρα $g\uparrow$ οπότε η εξίσωση $g(x)=0$

έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

$*\begin{cases} f(\gamma)=\gamma^2+\gamma+1>0 \text{ αφού } \Delta=1-4=-3<0 \\ f^{-1}(x)>0\ \forall x>1 \text{ άρα } f^{-1}(\delta)>0 \end{cases}$

• $g(1)=-f^{-1}(\delta)<0$
$g(2)=f(\gamma)>0$

$g(1)g(2)<0$ από Θ. Bolzano ...

<u>Τελικά</u> η $\frac{f(\gamma)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\delta)}{x-1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{\Delta 1}$ ΘΕΤΟΥΜΕ $h(x) = \dfrac{g(x)-1}{x-\alpha}$, $x \neq \alpha$, $\alpha > 0$

• $g(x) = (x-\alpha)h(x) + 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha}\left((x-\alpha)h(x)+1\right)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 1$ κ' ΕΠΕΙΔΗ g ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ ΤΟΤΕ

$g(\alpha) = 1$ ΕΠΙΣΗΣ $g'(\alpha) = \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} = \dfrac{g(x)-1}{x-\alpha} = 2$

$\boxed{\Delta 2}$ ▸ $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{g(x)\cdot \ln\alpha - g(\alpha)\ln x}{x-\alpha} =$

$= \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{g(x)\ln\alpha - g(\alpha)\ln\alpha + g(\alpha)\ln\alpha - g(\alpha)\ln x}{x-\alpha} =$

$\overset{*}{=} \lim\limits_{x\to\alpha}\left(\ln\alpha \cdot \dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} - g(\alpha)\dfrac{\ln x - \ln\alpha}{x-\alpha}\right) =$

$= \ln\alpha \cdot g'(\alpha) - g(\alpha)\cdot\dfrac{1}{\alpha} = 2\ln\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$

$*$ $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\ln x - \ln\alpha}{x-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ (ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΤΗΣ $f(x) = \ln x$ ΣΤΟ $x_0 = \alpha$)

▸ $2\ln\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{1}{\alpha^2} + \ln\alpha \Leftrightarrow \ln\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} = \ln\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \overset{**}{\Leftrightarrow}$

Θεωρω, $K(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$

$K'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2} \geq 0$ άρα $K \uparrow$ ΟΠΟΤΕ K' "1-1"

$\overset{**}{\Leftrightarrow} K(\alpha^2) = K(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$$\bullet \begin{cases} f(x) = \beta x - e^{-x} \\ f'(x) = \beta + e^{-x} \\ f''(x) = -e^{-x} \end{cases} \quad \Big| \quad f''(x) + f'(x) = 2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 2}$$

οπότε $f(x) = 2x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Delta 3}$. $f'(x) = 2 + e^{-x} > 0$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση

$f(x) = 0$ ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΟΛΥ ΜΙΑ ΡΙΖΑ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

- f ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $[0, 1]$ ως ΣΥΝΘΕΣΗ Κ' ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΕΧΩΝ

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 2 - e^{-1} = 2 - \frac{1}{e} = \frac{2e-1}{e} > 0 \end{array}\right\rangle f(0)\,f(1) < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΕΝΑ $x_0 \in (0,1)$ τ.ω. $f(x_0) = 0$

Τελικά, x_0 ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΘΕΤΙΚΗ ΡΙΖΑ ΤΗΣ $f(x) = 0$

$\boxed{\Delta 4}$ $2x + f(x^3) = f(x^2) + e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = f(x^2) - f(x^3)$

- Για $x < x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$

- $x_0 \in (0,1) \supseteq (0, x_0)$ άρα $x^2 > x^3 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x^2) > f(x^3)$

$\Leftrightarrow f(x^2) - f(x^3) > 0$

Άρα η εξίσωση $\underbrace{f(x)}_{-} = \underbrace{f(x^2) - f(x^3)}_{+}$ ΕΙΝΑΙ ΑΔΥΝΑΤΗ $\forall x \in (0, x_0)$