ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 2/11/2024

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A4}$ α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ f ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜ.

• $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=-1=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+2/x+4/x^2}+1\right)}=\frac{2}{-2}=-1=\beta$$

$\boxed{(\varepsilon_1):\ y=-x-1}$ ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜ. ΤΗΣ C_f ΣΤΟ $-\infty$

• $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)=\dots=1=\beta$$

άρα $\boxed{\varepsilon_2:\ y=x+1}$ ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜ. ΤΗΣ C_f ΣΤΟ $+\infty$

$\boxed{B2}$ $$f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

ΟΕ $=f(-1)=\sqrt{3}$

▷ $f(x)\geq f(-1)=\sqrt{3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ΚΑΙ ΤΟ ΙΣΟΝ

ΙΣΧΥΕΙ ΜΟΝΟ ΓΙΑ $x=-1$

B3 • $f(\ln x) = \sqrt{3} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f(\ln x) = f(-1) \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{e}}$

B4 $(\varepsilon): \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 4} = \frac{x_0 + 1}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 4}}(x - x_0)$$

$O(0,0) \in (\varepsilon) \Rightarrow 0 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 4} = \frac{x_0 + 1}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 4}}(-x_0)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 4}\right)^2 = x_0^2 + x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 + 4 = x_0^2 + x_0 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = -4}$

• $f(-4) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$f'(-4) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\varepsilon): \; y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\boxed{(\varepsilon): \; y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x .}$$

Θέμα Γ

Γ1 • $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha x + \beta}{x} \right) = 1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x^2} + \alpha + \frac{\beta}{x} \right) = 1 \overset{*}{\Leftrightarrow} 0 + \alpha + 0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$* \quad \left| \frac{\eta\mu x}{x^2} \right| \le \frac{1}{|x^2|} \Leftrightarrow \underset{\downarrow \atop 0}{-\frac{1}{|x^2|}} \le \underset{\downarrow \text{ΚΠ} \atop 0}{\frac{\eta\mu x}{x^2}} \le \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{|x^2|}}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \cancel{x} + \beta - \cancel{x} \right) = 1$

$\Leftrightarrow 0 + \beta = 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$

Γ2 • $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} + x + 1 - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu x + x^2 - x}{x^2} \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x + 2x - 1}{2x} \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-\eta\mu x + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x + 1 - \eta\mu x}{1}$

$= 1$

Άρα $f'(0) = 1 = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}$

$(\varepsilon): \; y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y - 2 = x \Leftrightarrow y = x + 2$

$\boxed{\Gamma 3}$ $f(x)=x^2+x+\text{συν}x+1,\ x\geq 0$

$f'(x)=2x+1-\text{ημ}x$

$f'(x_0)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow f'(x_0)=2 \Leftrightarrow$

$2x_0+1-\text{ημ}x_0-2=0 \Leftrightarrow 2x_0-\text{ημ}x_0-1=0$

Θεωρώ $h(x)=2x-\text{ημ}x-1,\ x\in[0,1]$

- h ΣΥΝΕΧΗΣ ΩΣ ΠΡΑΞΗΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΤΟ $[0,1]$

$h(0)=-1<0$

$h(1)=2-\text{ημ}1-1=1-\text{ημ}1>0$

$\Big\} h(0)h(1)<0$

από Θ. Bolzano $\exists\, x_0\in(0,1):\ h(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$2x_0-\text{ημ}x_0-1=0 \Leftrightarrow \text{ημ}x_0=1-2x_0$

- $h'(x)=2-\text{συν}x>0$ άρα $h\uparrow$ στο $[0,1]$ άρα x_0 ΜΟΝΑΔΙΚΟ

$\boxed{\Gamma 4}$ $g(x)=|2x^2+2x+2\text{συν}x+2-\cancel{2x^2}-\cancel{2x}-1|=$

$=|2\text{συν}x+1|,\ x\in(0,\pi]$

- $K(x)=2\text{συν}x+1,\ x\in(0,\pi]$ ΣΥΝΕΧΗΣ ΩΣ ΠΡΑΞΕΩΣ ΣΥΝΕΧΩΝ

$K(x)=0 \Leftrightarrow \text{συν}x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}x=\text{συν}\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=2κ\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

$0<2κ\pi+\frac{2\pi}{3}\leq\pi$

$-\frac{2}{3}<2κ\leq 1-\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}<2κ\leq\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}<κ\leq\frac{1}{6}$

$κ=0 \to x=\frac{2\pi}{3}$

$0<2κ\pi-\frac{2\pi}{3}\leq\pi$

$\frac{2}{3}<2κ\leq\frac{5}{3}$

$\frac{1}{3}<κ\leq\frac{5}{6}$

$κ\notin\mathbb{Z}$

x	0		$2\pi/3$		π
x_0		$\pi/3$		π	
$K(x_0)$		2		-1	
$K(x)$		$+$	0	$-$	

Άρα $g(x)=\begin{cases}2\text{συν}x+1, & 0<x\leq\frac{2\pi}{3}\\ -2\text{συν}x-1, & \frac{2\pi}{3}<x\leq\pi\end{cases}$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{Δ1}$ Για $x=\frac{1}{\alpha}$: $f(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha})=e^{\frac{1}{\alpha}}-\alpha \Leftrightarrow f(1)=e^{\frac{1}{\alpha}}-\alpha$

$\Leftrightarrow e-1=e^{\frac{1}{\alpha}}-\alpha \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\alpha}}-\alpha-e+1=0 \overset{*}{\Leftrightarrow} K(\alpha)=K(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{\alpha=1}$

* Θεωρώ $K(x)=e^{\frac{1}{x}}-x-e+1$, $x>0$

$K'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}-1<0$ άρα $K\downarrow$ οπότε K 1-1

$K(1)=e-1-e+1=0$

$\boxed{Δ2}$ (α) $f'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$ άρα $f\uparrow$ στο $(0,+\infty)$ οπότε K 1-1

• f συνεχής κ $\uparrow$ στο $(0,+\infty) \longrightarrow f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$

$=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Άρα $A_{f^{-1}}=f(A)=\mathbb{R}$

(β) $f\uparrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει

το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$

• $f(1/2)=e^{1/2}-2=\sqrt{e}-2<0$

• $f(1)=e-1>0$

$\Big\} f(1/2)f(1)<0$

από Θ. Bolzano $\exists\, x_0\in(1/2,1)\subseteq(0,1)$: $f(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0 \Leftrightarrow \boxed{e^{x_0}=\frac{1}{x_0}}$

$\boxed{Δ3}$ Είναι : $f^{-1}(f(x))=x$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΖΟΥΜΕ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ : $(f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x)=1$

Για $x=x_0$: $(f^{-1})'(0)\cdot f'(x_0)=1$

$\Leftrightarrow (f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{e^{x_0}+\frac{1}{x_0^2}}=\frac{1}{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}}=\frac{x_0^2}{x_0+1}$

$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$

$\boxed{\Delta 4}$ (α) $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^*$ άρα $g(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

• $x_0 < 1 \Leftrightarrow -2x_0 > -2 \Leftrightarrow 3 - 2x_0 > 1 \overset{f \uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f(3-2x_0) > f(1) = e - 1 > 0$

άρα $g(1) > 0$

$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ } \mathbb{R} \\ g(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ άρα η g ΔΙΑΤΗΡΕΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

ΚΑΙ ΕΠΕΙΔΗ $g(1) > 0$ ΤΟΤΕ $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

β) Για $x > x_0 \overset{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$, $\boxed{x_0 < 1}$

ΑΡΑ $\forall x \geq 1$ το η $f(x) > 0$ ΔΗΛ. $f(x) \neq 0 \; \forall x \in [1,2]$

• $g(x)^{f(x)} = \left(\sqrt{g(1)g(2)}\right)^{f(x)} \Leftrightarrow \ln g(x)^{f(x)} = \ln\left(\sqrt{g(1)g(2)}\right)^{f(x)}$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot \ln g(x) = f(x) \cdot \ln(g(1) \cdot g(2))^{1/2} \overset{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \ln g(x) = \frac{1}{2}(\ln g(1) + \ln g(2)) \Leftrightarrow \boxed{\ln g(x) = \frac{\ln g(1) + \ln g(2)}{2}}$

Θέτω, $h(x) = \ln g(x)$, $x \in [1,2]$

h ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $[1,2]$ ως ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΑΠΟ ΘΜΕΤ.

$\exists x_1, x_2 \in [1,2] : h(x_1) = m = \text{Ο.Ε.}$ κ' $h(x_2) = M = \text{Ο.Μ}$

ΔΗΛ. $2m \leq h(1) + h(2) \leq 2M \Leftrightarrow$

$m \leq \frac{h(1) + h(2)}{2} \leq M$

ΑΡΑ ο ΑΡΙΘΜΟΣ $\frac{h(1)+h(2)}{2} \in h([1,2]) = [m, M]$ ΟΠΟΤΕ

$\exists \xi \in [1,2] : h(\xi) = \frac{h(1) + h(2)}{2} \Leftrightarrow \ln g(\xi) = \frac{\ln g(1) + \ln g(2)}{2}$