ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
22/12/24

ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) :

α) Η ευθεία $x=5$ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=0. Σ Λ

β) Η εξίσωση : $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ παριστά όλες τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{A}(x_0,y_0)$. Σ Λ

γ) Η απόσταση του σημείου $\mathrm{A}(x_0,y_0)$ από την ευθεία $(\varepsilon):\mathrm{A}x+By+\Gamma=0$ δίνεται από τον τύπο: $d(A,\varepsilon)=\dfrac{\mathrm{A}x_0+By_0+\Gamma}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$. Σ Λ

δ) Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(\mathrm{B},-\mathrm{A})$ είναι παράλληλο στην ευθεία $(\varepsilon):\mathrm{A}x+By+\Gamma=0$. Σ Λ

ε) Η εξίσωση $\mathrm{A}x+By+\Gamma=0$ με Α , Β , $\Gamma\in R$ παριστά ευθεία. Σ Λ

(Μον.2 x 5)

Β. α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,-3)$ και είναι παράλληλη στην $(\zeta):3x-4y+7=0$.
ii. Διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{B}(1,1)$ και $\Gamma(3,7)$.
iii. Διέρχεται από το σημείο $\Delta(-3,6)$ και είναι κάθετη στην $(\eta):y=2024$.

(Μον.3x4)

β) Υπολογίστε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) όταν:
Α(1,4) και $(\varepsilon):y=3x-9$

(Μον.3)

ΘΕΜΑ 2

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,4) και ύψη ΒΔ : $x-2y+3=0$ και ΓΕ : $x+y-2=0$

i. Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ΑΒ και ΑΓ εφόσον ορίζονται.
ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.
iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

(Μον.3x4)

Β. Δίνεται η εξίσωση : $(2\lambda-1)x+(18-11\lambda)\,\mathrm{y}+9\lambda-17=0$, $\lambda\in R$ (1).

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in R$ η εξίσωση (1) παριστά ευθεία.

(Μον.6)

ii. Αν $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για λ=1 και λ=2 αντίστοιχα ,να βρείτε:

α) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

(Μον.4)

β) Σημείο Μ του $\mathrm{x'x}$ τέτοιο ώστε $(\mathrm{OMK})=6\,\tau.\mu$,όπου Ο η αρχή των αξόνων και Κ το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$. (Μον. 3)

ΘΕΜΑ 3

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως «Σωστές» ή «Λανθασμένες».

1. Αν ημω = 1 τότε ισχύει πάντα συνω = 0. Σ Λ
2. Ισχύει $\sigma\upsilon\nu(x-\frac{\pi}{2}) = \eta\mu x$. Σ Λ
3. Οι συναρτήσεις f(x) = 2025ημ3x και g(x)= -2024ημ4x έχουν την ίδια μέγιστη τιμή. Σ Λ
4. Οι συναρτήσεις f(x) = 20ημ2025x και g(x)= -2ημ2025x έχουν την ίδια περίοδο. Σ Λ
5. Υπάρχει γωνία ω με ημω + συνω = 2 Σ Λ

(Μον. 5)

Β. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i. $2\sigma\upsilon\nu 2x = \sqrt{2}$ ii. $2\eta\mu(x + \frac{\pi}{4}) = -1$ iii. $(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\sqrt{3} + \varepsilon\varphi x) = 0$ (Μον. 9)

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τη περίοδο της f και τη διαφορά της ελάχιστης από την μέγιστη τιμή.
ii . Να σχεδιάσετε τη γραφική της συνάρτησης σε διάστημα μιας περιόδου.
Βάσει της παραπάνω γραφικής παράστασης που έχετε σχεδιάσει:
iii. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f σε διάστημα μιας περιόδου.
iv. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\frac{\pi}{3})$ και $f(\frac{2\pi}{5})$ βάση της μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μον. 3, 3, 3, 2)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu^2(2x) - 2 + 2\sigma\upsilon\nu^2(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Α. Να αποδειχτεί ότι $f(x) = \eta\mu^2(2x)$.

Β Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^2(2x) + 2\eta\mu 2x - 3 = 0$ (1), $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Γ. Αν η λύση της εξίσωσης του Β ερωτήματος είναι $x = \frac{\pi}{4}$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+x)+\sigma\upsilon\nu(20\pi-x)+2}{\eta\mu(\frac{7\pi}{2}+x)+\eta\mu(5\pi-x)+4} = \frac{1}{2}.$$

Δ. Να αποδειχτεί η ανισότητα $\frac{f(x)}{2} > \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2x) - 1$ (Μον. 4, 8, 10, 3)