

## Διαγώνισμα Β λυκείου Μαθηματικά

Ημερομηνία : 12 – 11 - 2023

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**A2.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $A\Delta$  το ύψος του. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

i)  $(\overline{AB}, \overline{A\Delta}) = \frac{\pi}{3}$  , ii)  $(\overline{AB}, \overline{\Gamma A}) = \frac{\pi}{3}$  , iii)  $(\overline{AB}, \overline{\Gamma B}) = \frac{2\pi}{3}$  , iv)  $\overline{AB} = \overline{B\Gamma}$

v)  $|\overline{A\Gamma}| = |\overline{B\Gamma}|$  , vi)  $\overline{AB} \cdot (\overline{A\Delta} \cdot \overline{B\Gamma}^2) \neq (\overline{AB} \cdot \overline{A\Delta}) \cdot \overline{B\Gamma}^2$  , vii)  $|\overline{AB} \cdot \overline{\Delta A}| = |\overline{AB}| \cdot |\overline{\Delta A}|$ .

**A3.** Αν ισχύει  $2\overline{A\Lambda} + 3\overline{B\Lambda} + 2\overline{M\Lambda} = \overline{A\Gamma} + \overline{A\Delta} + \overline{B\Gamma}$  , να δείξετε ότι τα σημεία  $\Lambda, \Gamma$  και  $M$  είναι συνευθειακά.

Μονάδες : 5 – 14 – 6

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν  $\overline{A\Delta} = \frac{2}{3}\overline{AB} + \frac{5}{6}\overline{A\Gamma}$  και  $\overline{A\epsilon} = \frac{5}{6}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{A\Gamma}$  . Να δείξετε ότι τα

διανύσματα  $\overline{A\epsilon}, \overline{B\Gamma}$  είναι αντίρροπα.

**B2.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , για τα οποία ισχύουν  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$ ,  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ . Να υπολογίσετε :

i)  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  , ii)  $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$  , iii)  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$  , iv)  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$  , v)  $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$ .

**B3.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2, 4)$ ,  $\vec{\beta} = (x, y)$ . Το διάνυσμα  $\vec{\beta}$  έχει μέτρο  $\sqrt{5}$  και το διάνυσμα  $\vec{u} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$  σχηματίζει με τον  $x$ 's γωνία  $225^\circ$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $|\vec{\alpha}| = 5$ .

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του  $\vec{\beta}$ .

iii) Αν το πέρας του  $\vec{\beta}$  βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δεν είναι συγγραμικά.

iv) Να βρείτε διάνυσμα αντίρροπο του  $\vec{\alpha}$  το οποίο έχει τριπλάσιο μέτρο.

Μονάδες : 4 – 10 – 11 (3-3-2-3)

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει:  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ .

**Γ2.** α) Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;

β) Να δώσετε τον ορισμό του ολικού μέγιστου για μία συνάρτηση  $f$ .

**Γ3.** α) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και στην συνέχεια να βρείτε την μονοτονία και τα ολικά ακρότατα της  $f$ .

β) Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης  $g$  της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δυο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της  $f$  κατά 1 μια μονάδα αριστερά και κατά 4 μονάδες προς τα κάτω, στην συνέχεια να δείξετε ότι η  $g$  είναι άρτια συνάρτηση.

**Γ4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- 1) Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία  $A(2023, -1)$  και  $B(2024, -3)$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- 2) Η  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$  είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
- 3) Ισχύει ότι  $\eta\mu^2 > 0$ .
- 4) Υπάρχει τιμή του  $x$ , ώστε να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu x = 0$  και  $\sigma\upsilon\nu x = 0$ .
- 5) Ισχύει ότι  $\eta\mu^2 x = \eta\mu x^2$ .

Μονάδες : 5 – 4(2-2) – 6(3-3) – 10

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Αν  $4\eta\mu^2\theta + 4\eta\mu\theta + 1 = 0$ , όπου  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι  $\eta\mu\theta = -\frac{1}{2}$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{\sigma\varphi(\frac{15\pi}{2} + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta - 10\pi)}{\varepsilon\varphi(\frac{17\pi}{2} - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{11\pi}{2} + \theta)}$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} + \frac{\eta\mu\varphi}{1 + \sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{2}{\eta\mu\varphi}$

**Δ3.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi(-\frac{31\pi}{4}) \cdot x^2 + \eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) + \eta\mu\frac{29\pi}{6}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $y'y$

γ) Αν η εξίσωση  $f(x) = 2024$  έχει ακριβώς 2 ρίζες  $x_1, x_2$ , να υπολογίσετε το άθροισμα ριζών  $x_1 + x_2$ .

Μονάδες : 7(3-4) – 6 – 12(4-2-6)