1. ✉ **Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1**
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ **Φανερωμένης 13**
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ** 8/4/2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

Α2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Α3. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος

i) Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2=R-\left\{x/\sigma\upsilon\nu x=0\right\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

ii) Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$.

iii) Αν $f(x)\leq k$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της f, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

iv) Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α,β,γ∈Δ τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$ αν και μόνο αν $\alpha<\gamma<\beta$

v) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν σημείο καμπής στο x_0 τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ έχει σημείο καμπής στο x_0, με την προϋπόθεση ότι ορίζεται η $f\cdot g$.

(7 – 4 – 4 – 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ με $f(0)=1$ και $f'\left(x\right)=-2xf^2(x)$ για κάθε $x\in R$.

Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x^2$ είναι σταθερή

Β2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Β3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β4. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf(x)\eta\mu\left(2023x\right)\right]$.

(5 – 3 – 6 – 7 – 4)

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ \dfrac{e}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$ και ο πραγματικός αριθμός α, με $\alpha<1$.

Γ1. Να εξετάσετε αν ισχύει κάθε μια από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\alpha, e^{1-\alpha}\right]$.

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

Γ3. Θεωρούμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ όπου, $\mathrm{A}(\alpha,0)$, $\Delta\left(e^{1-\alpha},0\right)$ και Β, Γ σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}(\alpha)=e-\alpha e^{\alpha}$.

ii) Να βρείτε την τιμή του α, για την οποία το εμβαδόν γίνεται μέγιστο καθώς και τη μέγιστη τιμή του

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή του α, για την οποία ισχύει $\mathrm{E}(\alpha)=\dfrac{e^2}{3}$.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή του α, για την οποία το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

(4 – 3 – 5 – 5 – 4 – 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=2e^{x+1}-2x-3$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)=0$.

Δ1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση g.

Δ2. Αν ισχύει $\displaystyle\int_{f'(\alpha)}^{2\alpha e^{-f(\alpha)}} g(x)dx=0$ για κάθε $\alpha\in R$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f^2(x)-f^3(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$.

Δ4. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=e^x-x+f(x)$.

i) Να μελετηθεί η συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{h(x)-\sigma\upsilon\nu x}$.

(6 – 7 – 4 – 8(5-3))