

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

24/2/2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha). \quad (7 \text{ μονάδες})$$

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat. (4 μονάδες)

A3. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής (4 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ . Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .

2. Αν f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη τότε $f'(x) \geq 0$.

3. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

4. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μια μόνο θέση ολικού ελαχίστου.

5. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$, με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα. (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $x \neq 0$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μονάδες)

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (7 μονάδες)

B3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα. (3 μονάδες)

B4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (6 μονάδες)

B5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x) dx$. (3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \ln(e^x + x), & x \geq 0 \end{cases}.$$

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της. **(4 μονάδες)**
- Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(8 μονάδες)**
- Γ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από τη C_f για $x < 0$ και τις ευθείες $y = -1$, $y = -2$ και $x = 0$. **(6 μονάδες)**
- Γ4.** Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \ln a - a \ln x$ και $f((0, +\infty)) = [0, +\infty)$ με $a > 0$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $a = e$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(7 μονάδες)**
- Δ2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2024} = x^e$ έχει ακριβώς δύο ρίζες **(5 μονάδες)**
- Δ3. i)** Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$ και να βρείτε πότε ισχύει η ισότητα. **(3 μονάδες)**
- ii)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\kappa, \lambda > 0$, για τους οποίους ισχύει $\kappa^x + \lambda^x \geq x^\kappa + x^\lambda$, για κάθε $x > 0$. **(4 μονάδες)**
- Δ4. i)** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f , στο σημείο της $A(1, f(1))$. **(2 μονάδες)**
- ii)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(1-e)x - f(x) + e}$. **(4 μονάδες)**