

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππι  
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



## Διαγώνισμα Γ Λυκείου Μαθηματικά 3/1/2023

### Θέμα Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

**A2.** Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  ;

**A3.** Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$  τότε κατ' ανάγκην θα ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ .
- β) Για τη συνάρτηση  $f(x) = 3^x$  ισχύει  $f'(x) = x \cdot 3^{x-1}$ .
- γ) Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ .
- δ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .
- ε) Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{|x|}$  έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'y$ .

**Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10**

### Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 1 - 2 \ln x$ ,  $x > 0$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

**B2.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (1, e)$  τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 1 - \frac{2}{x_0}$$

**B3.** Να δείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon) : y = -2x + 3$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$ .

**B4.** Έστω η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = \ln \frac{e}{x^2}$ . Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f = g$ .

**Μονάδες : 8 – 6 – 5 – 6**

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππε  
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



### Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :

- $f^2(x) - 8f(x) = x^2 - 7$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Τα σημεία  $A(\alpha, f(\alpha))$  και  $B(\beta, f(\beta))$  βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα  $x'x$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 9}$  ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ2.** Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο  $-\infty$ .

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(-1,3)$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $2^x - 2x - 10 + (4 - f(x))^2 = 0$  έχει το πολύ 2 ρίζες .

**Μονάδες : 8 - 5 - 6 - 6**

### Θέμα Δ

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :

- $f(0) < f'(x) \leq f(1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Τα σημεία  $A(1, f(1)), B(2, f(2)), \Gamma(3, f(3))$  είναι συνευθειακά .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ2.** Να αποδειχθεί ότι :

α) Υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  τέτοια ώστε  $f'(x_1) = f'(x_2)$ .

β) Υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{e^x \cdot f'(x) - e^\xi \cdot f'(\xi)}{x - \xi} = f'(x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x \cdot e^\xi).$$

**Δ3.** Αν  $F$  μια παράγουσα της  $f$  στο  $\mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2F(x+1) = F(x) + F(x+2) \text{ είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}.$$

**Δ4.** Αν  $f(1) = 1$  να δείξετε ότι η εξίσωση  $\ln x \cdot (1 - f(x)) = f^2(x) - 3f(x) + 2$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο  $[1, e)$ .

**Μονάδες : 4 - 10 - 5 - 6**