

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Διαγώνισμα Γ λυκείου Μαθηματικά 5/3/2023

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να δείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

A2. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής μιας συνάρτησης f .

A3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

« Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ τότε κατ' ανάγκην θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ».

Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως αληθή ή ψευδή αιτιολογώντας την απάντησή σας.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.

- α) Αν ισχύει ότι $f'(x) > 0$ και $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο.
- β) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- γ) Η ευθεία $(\varepsilon) : y = \lambda x + \mu$ και η γραφική παράσταση της κυρτής συνάρτησης f έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$. Τότε η (ε) αποτελεί εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο A .
- δ) Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- ε) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες : 7 – 4 – (1 – 3) – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

B2. Να βρείτε τις κατακόρυφες και τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

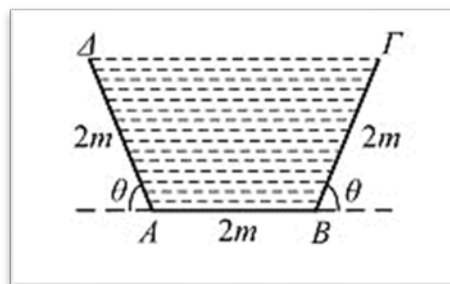
B3. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B1,B2** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

B4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Μονάδες : 12 – 4 – 5 – 4

Θέμα Γ

Έστω τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος και $E = E(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, το εμβαδόν του.



Γ1. Να αποδείξετε ότι $E(\theta) = 4\eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Γ2. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E του τραπέζιου γίνεται μέγιστο όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τραπέζιου ισούται με 5.

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση E δεν έχει σημεία καμπής.

β) Να βρείτε τις γωνίες $\theta_3, \theta_4 \in (0, \frac{\pi}{2})$, αν ισχυει :

$$E(\theta_3) = E'(\theta_4) \cdot (\theta_3 - \theta_4) + 3\sqrt{3}$$

Μονάδες : 5 – 8 – 5 – (2 – 5)

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (\alpha \cdot x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, με $\alpha > 0$ για την οποία

ισχύει $f(x) \leq (\alpha \cdot e)^{\frac{1}{e}}$, για κάθε $x \geq 0$.

Δ1. Να βρείτε το α .

Για $\alpha = 1$

Δ2. Να αποδείξετε ότι f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών $f(A) = [0, \sqrt[e]{e}]$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f\left(x^{\frac{3}{x}} + x^{\frac{1}{x}} - 2 + e\right) = \sqrt[e]{e}$$

έχει μοναδική λύση $x_1 = 1$.

Δ4. Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x) \cdot (1 - \ln x)}{x^2}$, $x > 0$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = \lambda^2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $E(\Omega) \geq \sqrt[e]{e} - 1$.