

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Διαγώνισμα Γ λυκείου Μαθηματικά

Ημερομηνία :13 – 5 – 2023

Θέμα Α

- A1.** Να αποδείξετε το θεώρημα Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.
- A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
- A3.** Ποτέ δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος.
- α) Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 - β) Η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.
 - γ) Ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}+h) - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h} = \frac{4}{3}$
 - δ) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε , $f'(x_0) < 0$.
 - ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις :

- $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln(x - 1)$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^{x-1}$.

B1. Να προσδιορίσετε την $f \circ g$.

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \ln(e^{x-1} - 1)$, με $x > 1$, να δείξετε ότι η $f \circ g$ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφής της.

B3. Αν $h(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln(e^x + 1) + 1$, με $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι για την h ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[-1, 1]$ και στην συνέχεια να βρείτε τη τιμή του ξ , του συμπεράσματος του θεωρήματος.

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(\ln(e^{x-1} - 1)) = x^2 - x + 1$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 4 – 8 – 8 – 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|1-\ln x|}{x}$, $x > 0$

Γ1. Να εξηγήσετε γιατί η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι τύπος της συνάρτησης f χωρίς το απολυτό είναι :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \ln x}{x} & , 0 < x < e \\ \frac{\ln x - 1}{x} & , x \geq e \end{cases}$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1 = e$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2 = e^2$.

Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, με $x > 0$ και η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με ρυθμό 1m/sec.

- i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του $E(t)$ του τριγώνου AOB , όπου $A(x,0)$, $O(0,0)$, $B(0,f(x))$, την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = 4$.
- ii) Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο M βρίσκεται στη θέση $(1,1)$, τότε να βρείτε την χρονική στιγμή t_0 .

Γ4. Αν για την συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\int_0^1 \left(\int_e^{e^2} f(t)g(1-x)dt \right) dx = 2$$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 g(x)dx$.

Μονάδες 5 – 7 – 7 – 6

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

- $\left(\int_0^{f(0)} e^{\sqrt{x}} dx \right) \cdot \left(\int_{\frac{3}{e^3}}^{f(3)} e^{\sqrt{x}} dx \right) \leq 0$
- $|e^x f(x) + y - e^y f(y) - x| \leq (x - y)^2$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 3]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{x_0}{e^{x_0}}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.
Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. i) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$ διαπερνά την C_f στο $M(2, f(2))$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(\lambda - e^2) \leq \frac{e^\lambda + \lambda}{e^\lambda}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ4. Αν ισχύει $e^2 \cdot (E - 1) = x_0 - 4 - e^{2-x_0}$, όπου E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f , τον άξονά x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = x_0$, να βρείτε την τιμή του x_0 του ερωτήματος **Δ1**.

Μονάδες 5 – 6 – 7(3-4) – 7